

Działania pisemne

Definicje

Niech n oznacza dodatnią liczbę całkowitą.

- Przez n_o będziemy oznaczać liczbę naturalną powstałą z liczby n przez skreślenie ostatniej cyfry, np. $123456_o = 12345$.
- Przez n' będziemy oznaczać liczbę naturalną, którą otrzymujemy odwracając porządek cyfr liczby n , np. $123456' = 654321$.
- Przez $\hat{n}$ będziemy oznaczać liczbę naturalną otrzymaną z liczby n przez przestawienie jej pierwszej cyfry na koniec, np. $\hat{123456} = 234561$.
- Przez $\overline{A_1 A_2 \dots A_n}$ będziemy oznaczać liczbę n -cyfrową o cyfrach $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Zadania

1. Uzupełnij schemat dzielenia przy założeniu, że żadna cyfra nie może się powtórzyć:

$$\begin{array}{r}
 \star \\
 \hline
 \star \star \star : \star \star \\
 - \quad \star \star \\
 \hline
 \star
 \end{array}$$

2. Suma dwóch liczb jest równa 51. Jeżeli w większym składniku skreślimy jedną cyfrę, to otrzymamy drugi składnik. Jakie to liczby?
3. Znajdź wszystkie pary cyfr A i B , dla których liczba

$$\overline{AB} + \overline{BA}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Wyznacz cyfry A i B , dla których zachodzi

$$\frac{A}{B} = B, A.$$

5. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 111, której ostatnimi cyframi są 2, 0, 2, 6.
6. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $n_o \mid n$.
7. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n , dla której zachodzi:

$$n' = 4 \cdot n.$$

8. Niech n będzie liczbą dziewięciocyfrową. Udowodnij, że w liczbie $n + n'$ przynajmniej jedna cyfra jest parzysta.

9. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n zaczynającą się cyfrą 7, dla której zachodzi:

$$n = 5 \cdot \hat{n}.$$

10. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n , dla której zachodzi:

$$\hat{n} = 3 \cdot n.$$

11. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

12. Dane są liczby naturalne a , b , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeśli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

13. Niech $S = \underbrace{11 \dots 1}_{19} \underbrace{99 \dots 9}_{19}$. Wykaż, że liczba $2S$ -cyfrowa

$$\underbrace{11 \dots 1}_S \underbrace{99 \dots 9}_S$$

jest podzielna przez 19.

Literatura

1. *Matematyka bez formuł*, Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki;
2. *Koło matematyczne*, Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki;
3. *Imperium liczb*, Andrzej Nowicki;
4. *Impresje liczbowe*, Lev Kourliandtchik;
5. *Zadania z OMJ*;
6. *Forum Art of Problem Solving (AoPS)*.