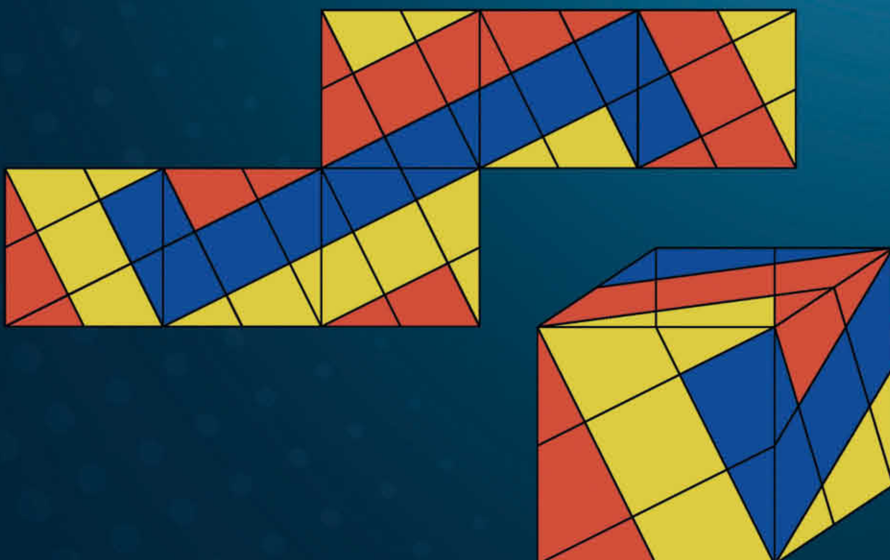
STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

FACEBOOKOWA LIGA
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Łukasz Bożyk

Rok szkolny 2013/2014



Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Facebookowa Liga OMG

edycja 2013/14

Łukasz Bożyk

WARSZAWA 2014

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autor rozwiązań: Łukasz Bożyk

Recenzent: dr Waldemar Pompe

Skład komputerowy: Łukasz Bożyk

Rysunki: Łukasz Bożyk

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-09-9

Nakład: 5000 egz.

Publikacja przygotowana w ramach projektu „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym” finansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

W roku szkolnym 2013/14 Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów prowadził za pośrednictwem facebookowego profilu OMG ligę zadaniową, której celem było przygotowanie do zawodów Olimpiady.

Liga składała się z czterech serii po 10 zadań, początkowo skierowanych do uczniów gimnazjum, a potem (od drugiej serii) do wszystkich zainteresowanych internautów. Chętni nadsyłali swoje rozwiązania na specjalny adres e-mail, a te były oceniane w skali 0 — niezrobione, 1 — zrobione. Dla każdej serii prowadzona była osobna punktacja, najlepsi uczestnicy poszczególnych serii wymienieni są poniżej.

W niniejszym zbiorze zebrane są treści 40 zadań wraz z rozwiązaniami. Do niektórych zadań dołączone są różne sposoby rozwiązania, szczegółowe komentarze i uogólnienia, bazujące między innymi na materiałach dostarczanych przez uczestników Ligi.

Mamy nadzieję, że broszura okaże się dobrą pomocą dla gimnazjalistów przygotowujących się do konkursów matematycznych, a także nauczycieli i pasjonatów matematyki.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Wyniki FLOMG

Pierwsza seria

I miejsce: Jan Bednarski, Bogna Pawlus, Kinga Sztonyk
II miejsce: Grzegorz Klocek
III miejsce: Jakub Boguta

Druga seria

I miejsce: Jan Bednarski, Bogna Pawlus
II miejsce: Kinga Sztonyk
III miejsce: Dominik Rafacz

Trzecia seria

I miejsce: Jan Bednarski, Bogna Pawlus
II miejsce: Sebastian Agata, Rafał Burczyński, Wojciech Wawrów
III miejsce: Michał Balcerek, Kinga Sztonyk

Czwarta seria

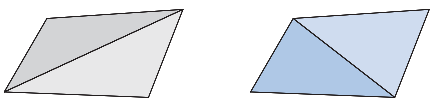
I miejsce: Jan Bednarski
II miejsce: Bogna Pawlus, Wojciech Wawrów
III miejsce: Kinga Sztonyk

Treści zadań

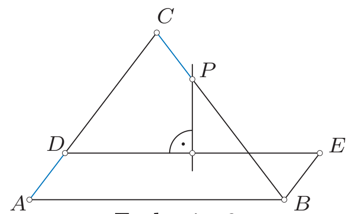
1. Dokładnie 60% uczniów pewnego gimnazjum spędziło wakacje w górach, a dokładnie $\frac{1}{3}$ uczniów tej szkoły — nad morzem. Ponadto dokładnie $\frac{1}{15}$ pozostałych uczniów spędziła wakacje za granicą. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba uczniów tego gimnazjum? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Zakładamy, że góry i morze nie są za granicą, morze nie jest w górach, góry nie są nad morzem, a każdy z uczniów wyjechał w co najwyżej jedno z tych trzech miejsc.

2. Każda przekątna pewnego czworokąta wypukłego dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. Udowodnij, że czworokąt ten jest równoległobokiem.



Zadanie 2.



Zadanie 6.

3. W grupie $2n+1$ osób każdy ma n znajomych i n nieznajomych. Udowodnij, że n jest liczbą parzystą.

Uwaga. Przyjmujemy, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.

4. W drodze do domu Fredek postanowił zatankować, przez co czas jego podróży wydłużył się o 10%. Kolejnego dnia, przemierzając tę samą drogę, Fredek tankował dwukrotnie dłużej, przez co całkowity czas jego podróży wyniósł jedną godzinę. Ile czasu zajęłaby Fredkowi podróż, gdyby nie tankował?

5. Czy istnieją takie liczby niewymierne x, y, że

$$x+y=xy$$

oraz liczba $x+y=xy$ jest wymierna? Odpowiedź uzasadnij.

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt D leży na boku AC, a punkt E wybrany jest w taki sposób, że czworokąt $ABED$ jest równoległobokiem. Symetralna odcinka DE przecina odcinek BC w punkcie P. Udowodnij, że $AD=CP$.

7. Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko. Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis. Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.

8. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a,b,c), dla których

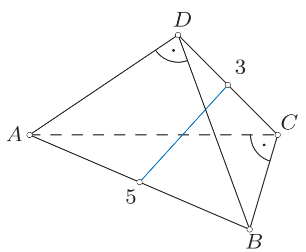
$$a+b+c=1 \quad \text{oraz} \quad 3(a+bc)=4(b+ca)=5(c+ab).$$

9. Czy istnieje liczba naturalna n, dla której $(n+2)$-cyfrowa liczba

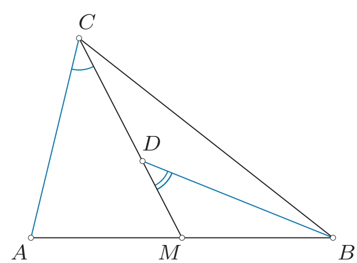
$$9\underbrace{22\ldots2}_{n\ \text{dwójek}}9$$

jest podzielna przez 2013? Odpowiedź uzasadnij.

10. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB=5$, $CD=3$ oraz $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=90^\circ$. Znajdź długość odcinka łączącego środki krawędzi AB i CD.



Zadanie 10.



Zadanie 12.

11. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których wartość iloczynu

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(3-\frac{3}{4}\right)\ldots\left(n-\frac{n}{n+1}\right)$$

jest liczbą naturalną.

12. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na odcinku CM znajduje się taki punkt D, że $AC=BD$. Wykaż, że $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB$.

13. Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba czarnych pól. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba białych pól w całej tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

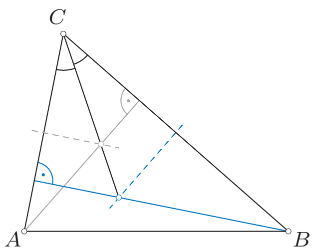
$$(a+b)(c+d)=(a+c)(b+d)=(a+d)(b+c).$$

Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

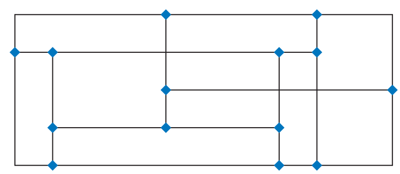
15. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a,b), dla których

$$\mathrm{NWD}(a^2+1, b^2+1) = a+b.$$

16. W trójkącie ostrokątnym ABC symetralna boku AC i wysokość poprowadzona do boku BC przecinają się na dwusiecznej kąta ACB. Wykaż, że symetralna boku BC i wysokość poprowadzona do boku AC również przecinają się na dwusiecznej kąta ACB.



Zadanie 16.



Zadanie 17.

17. Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.

18. Dodatnie liczby wymierne a, b, c spełniają równość $a^2+b^2+c^2=abc$. Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ca)(c^3+ab)}$$

jest wymierna.

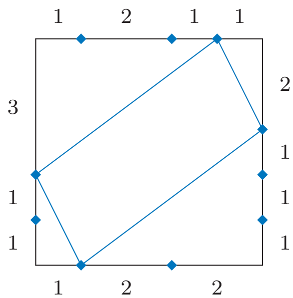
19. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.

20. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych (p,q,r), dla których

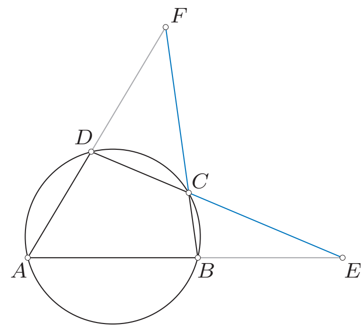
$$\frac{p^2+q}{q^2+p} = r \quad \text{oraz} \quad \frac{p^2+r}{r^2+p} = q.$$

21. Wyznacz wszystkie takie pary liczb naturalnych (a,b), że a^2+b^2 jest liczbą pierwszą i $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

22. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że jeśli $BE=DF$, to $CE=CF$.



Zadanie 19.



Zadanie 22.

23. W pewnej grupie jest n osób, przy czym $n \geqslant 4$. Dowolne cztery osoby z tej grupy można usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoim znajomym i nieznajomym. Znajdź wszystkie wartości n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

24. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a,b), dla których liczba $4^a+4^b+4^{a+b}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

25. Powierzchnię sześcianu należy szczelnie okleić trzema jednakowymi, wyciętymi z papieru, figurami środkowosymetrycznymi. Czy można to uczynić w taki sposób, aby każda figura pokrywała środki pewnych dwóch przeciwległych ścian sześcianu? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Figury nie mogą na siebie nachodzić. Środki ścian powinny być w całości pokryte przez jedną figurę.

26. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=2$. Udowodnij, że

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}>ab+bc+ca.$$

27. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Wykaż, że suma pól trójkątów ABE i ADF jest równa polu trójkąta CEF.

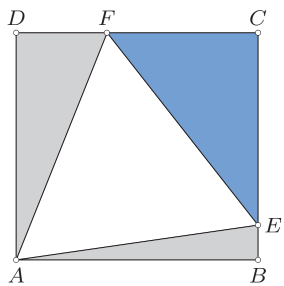
28. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, że dowolne dwie z nich mają największy wspólny dzielnik większy od 1, a dowolne trzy z nich mają największy wspólny dzielnik równy 1? Odpowiedź uzasadnij.

29. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczba $n+2^k$ ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze.

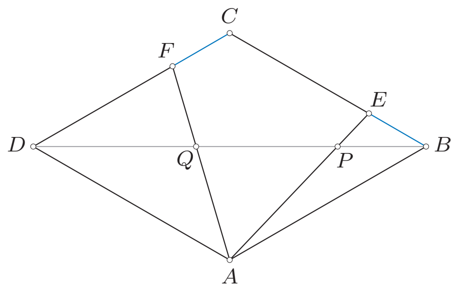
30. Każdy punkt sfery pomalowano jednym z dwóch kolorów w taki sposób, że dowolny okrąg wielki tej sfery zawiera punkty obydwu kolorów. Czy stąd wynika, że pewna średnica sfery ma końce różnych kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Okręgiem wielkim nazywamy każdy okrąg narysowany na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery.

31. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = 120°$. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że $BE = CF$. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że z odcinków o długościach BP, PQ, QD można zbudować trójkąt, którego jeden z kątów ma miarę $60°$.



Zadanie 27.



Zadanie 31.

32. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z trzech kolorów. Okazało się, że każdy odcinek ma następującą własność: jeśli końce odcinka mają ten sam kolor, to jego środek jest tego samego koloru co każdy z końców, a jeśli końce odcinka mają różne kolory, to jego środek jest innego koloru niż każdy z końców. Udowodnij, że wszystkie punkty płaszczyzny pomalowano tym samym kolorem.

33. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $a^3 + b^3 + 1 = 3ab$. Znajdź wszystkie wartości, które może przyjmować suma $a + b$.

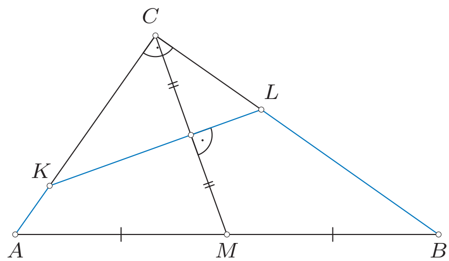
34. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że przy dzieleniu przez $a+b+1$ liczby a^2 i b^2 dają odpowiednio reszty c i d, a przy dzieleniu przez $c+d+1$ liczby c^2 i d^2 dają odpowiednio reszty a i b. Udowodnij, że $|a-d| = |b-c|$.

35. Każde pole tablicy o wymiarach 5×5 pomalowano albo na czarno, albo na biało. Wykaż, że można tak wybrać dwa wiersze i dwie kolumny tej tablicy, aby cztery pola na ich przecięciach były tego samego koloru.

36. Czy istnieją dwa wielościany wypukłe o różnych objętościach, które mają przystające siatki? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Tutaj *siatką* nazywamy wielokąt, który powstaje przez rozcięcie powierzchni wielościanu wzdłuż jego niektórych krawędzi i rozłożenie na płaszczyźnie. Rysunek przedstawia możliwe siatki czworościanu foremnego.

Zadanie 36.



Zadanie 39.

37. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są takie, że liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ mają wspólny dzielnik pierwszy. Czy stąd wynika, że liczby $a+b^{16}$, $b+c^{16}$, $c+a^{16}$ również mają wspólny dzielnik pierwszy? Odpowiedź uzasadnij.

38. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są takie, że liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ mają wspólny dzielnik pierwszy. Czy stąd wynika, że liczby $a-b$, $b-c$, $c-a$ również mają wspólny dzielnik pierwszy? Odpowiedź uzasadnij.

39. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Symetralna odcinka CM przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $AK^2+BL^2=KL^2$.

40. Niech S będzie dowolnym zbiorem $2n$ pól szachownicy $n\times n$, dla którego spełnione są warunki:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się dokładnie 2 pola należące do S,
- ruchami wieży szachowej można obejść wszystkie pola zbioru S, stając tylko na polach zbioru S, na każdym dokładnie raz.

Wykaż, że można pomalować pola szachownicy przy użyciu n kolorów w taki sposób, że:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie 1 pole każdego koloru,
- zbiór S zawiera dokładnie 2 pola każdego koloru.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Dokładnie 60% uczniów pewnego gimnazjum spędziło wakacje w górach, a dokładnie $\frac{1}{3}$ uczniów tej szkoły — nad morzem. Ponadto dokładnie $\frac{1}{15}$ pozostałych uczniów spędziła wakacje za granicą. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba uczniów tego gimnazjum? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Zakładamy, że góry i morze nie są za granicą, morze nie jest w górach, góry nie są nad morzem, a każdy z uczniów wyjechał w co najwyżej jedno z tych trzech miejsc.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że n jest liczbą uczniów danego gimnazjum. Wówczas z treści zadania wynika, że uczniów, którzy nie spędzili wakacji ani w górach, ani nad morzem, jest

$$n-\tfrac{3}{5}n-\tfrac{1}{3}n=\tfrac{15}{15}n-\tfrac{9}{15}n-\tfrac{5}{15}n=\tfrac{1}{15}n.$$

W takim razie $\frac{1}{15}$ otrzymanej liczby, czyli $\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{15}n=\frac{1}{225}n$, to liczba uczniów, którzy spędzili wakacje za granicą. Wobec tego n musi być liczbą podzielną przez 225, powiedzmy $n=225k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k.

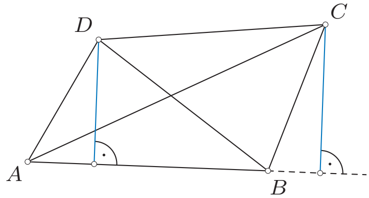
Pozostaje uzasadnić, że dla każdej liczby n postaci $225k$ warunki zadania są spełnione: $60\%n=135k$, $\frac{1}{3}n=75k$, $\frac{1}{225}n=k$ są wówczas liczbami całkowitymi. Dla $k=1$ uzyskujemy najmniejszą możliwą liczbę uczniów: **225**.

Zadanie 2. Każda przekątna pewnego czworokąta wypukłego dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. Udowodnij, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

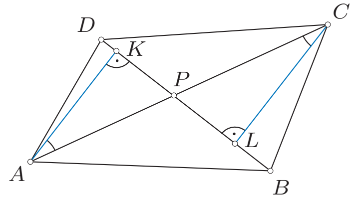
Rozwiązanie

Sposób I

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym każda przekątna połowi pole. Wówczas każdy z trójkątów ABC i ABD ma pole równe połowie pola czworokąta $ABCD$. Ale trójkąty te mają wspólną podstawę AB, więc muszą mieć także równe wysokości opuszczone na tę podstawę (rys. 1). To zaś oznacza, że odległości punktów C i D od prostej AB są równe, czyli proste AB i CD są równoległe.



rys. 1



rys. 2

Analogicznie uzasadniamy, że proste BC i AD są równoległe. Uzyskane dwie równoległości oznaczają, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Sposób II

Przyjmijmy takie oznaczenia, jak w poprzednim sposobie oraz niech P będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$, a K i L będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i C na prostą BD (rys. 2). Skoro trójkąty ABD i BCD mają równe pola i wspólną podstawę BD, to ich wysokości opuszczone na tę podstawę też są równe, czyli $AK=CL$. Ponadto $\sphericalangle AKB=\sphericalangle CLD=90^\circ$ oraz $\sphericalangle KAC=\sphericalangle LCA$, więc trójkąty AKP i CLP (być może zdegenerowane, w przypadku, gdy $K=P=L$) są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Stąd $AP=CP$.

Analogicznie dowodzimy, że $BP=DP$. To oznacza, że przekątne czworokąta $ABCD$ dzielą się na połowy, więc czworokąt ten jest równoległobokiem.

Zadanie 3. W grupie $2n+1$ osób każdy ma n znajomych i n nieznajomych. Udowodnij, że n jest liczbą parzystą.

Uwaga. Przyjmujemy, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.

Rozwiązanie

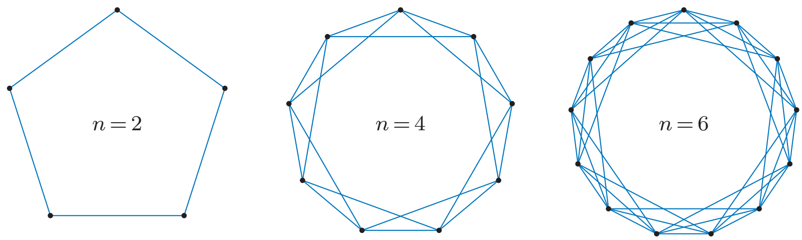
Policzymy łączną liczbę relacji znajomości w danej grupie. Dla każdej z $2n+1$ osób liczymy wszystkich jej znajomych, otrzymując $n(2n+1)$. Ale każdą znajomość policzyliśmy dwukrotnie, raz z punktu widzenia jednej ze znających się osób, a raz drugiej. To oznacza, że wszystkich znajomości w grupie jest

$$\frac{n(2n+1)}{2}.$$

Jednak ta liczba jest całkowita, a czynnik $2n+1$ jest liczbą nieparzystą. To oznacza, że n jest liczbą parzystą, co kończy rozwiązanie.

Uwaga

Dla każdej liczby parzystej n można wskazać grupę $2n+1$ osób, w której każdy ma n znajomych i n nieznajomych. Grupę taką konstruujemy następująco: sadzamy $2n+1$ osób przy okrągłym stole i ustalamy, że każdy zna tylko te osoby, które są od niego odległe o nie więcej niż $\frac{n}{2}$ miejsc (w obie strony). Odpowiednie grupy dla $n=2,4,6$ są przedstawione na rys. 3, przy czym punkty oznaczają osoby, a odcinki między nimi — relacje znajomości.



rys. 3

Zadanie 4. W drodze do domu Fredek postanowił zatankować, przez co czas jego podróży wydłużył się o 10%. Kolejnego dnia, przemierzając tę samą drogę, Fredek tankował dwukrotnie dłużej, przez co całkowity czas jego podróży wyniósł jedną godzinę. Ile czasu zajęłaby Fredkowi podróż, gdyby nie tankował?

Rozwiązanie

Przez t oznaczmy czas podróży bez tankowania (w minutach). Pierwszego dnia Fredek tankował przez $\frac{1}{10}t$ minut, a kolejnego dnia — przez

$$2\cdot\tfrac{1}{10}t=\tfrac{1}{5}t$$

minut. To oznacza, że całkowity czas podróży drugiego dnia wyniósł

$$t+\tfrac{1}{5}t=\tfrac{6}{5}t$$

minut. Ale z treści zadania wiemy, że liczba ta jest równa 60, skąd

$$\tfrac{6}{5}t=60, \quad \text{czyli} \quad t=\tfrac{5}{6}\cdot 60=50.$$

W takim razie podróż bez tankowania zajęłaby Fredkowi **50 minut**.

Zadanie 5. Czy istnieją takie liczby niewymierne x, y, że

$$x+y=xy$$

oraz liczba $x+y=xy$ jest wymierna? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Takie liczby istnieją. Przyjmijmy na przykład $x=3-\sqrt{3}$, $y=3+\sqrt{3}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas

$$x+y=(3-\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})=6 \quad \text{oraz} \quad xy=(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3^2-(\sqrt{3})^2=6,$$

a 6 jest liczbą wymierną. Pozostaje uzasadnić, że liczby x, y są niewymierne.

Istotnie, gdyby liczba x była wymierna, to również liczba $3-x=\sqrt{3}$ byłaby wymierna, jako różnica dwóch liczb wymiernych. Jednak liczba $\sqrt{3}$ nie jest wymierna. Analogicznie dowodzimy, że liczba y jest niewymierna.

Uwaga

Wskazany przykład liczb x, y nie jest jedynym spełniającym warunki zadania. Aby znaleźć inny przykład, rozważmy $x=a-\sqrt{b}$ oraz $y=a+\sqrt{b}$, gdzie a, b są pewnymi dodatnimi liczbami wymiernymi. Wówczas liczby

$$x+y=2a \quad \text{oraz} \quad xy=(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})=a^2-b$$

są wymierne. Ponadto, jeżeli b nie jest kwadratem liczby wymiernej, to liczba $\sqrt{b}$ jest niewymierna, a w konsekwencji także liczby x, y są niewymierne. Pozostaje zadbać o to, aby spełniona była równość $x+y=xy$, czyli

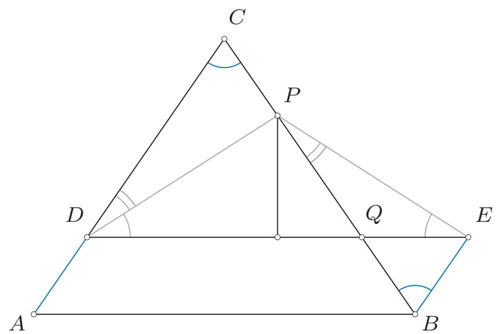
$$2a=a^2-b, \quad \text{lub równoważnie} \quad b=a(a-2).$$

Wybierając liczbę $a>2$ w taki sposób, aby liczba $b=a(a-2)$ nie była kwadratem liczby wymiernej, uzyskujemy parę x, y spełniającą warunki zadania. Na przykład dla $a=3$ otrzymujemy $b=3$, a zatem parę wskazaną w rozwiązaniu. Inne pary to na przykład $(x,y)=(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$ dla $a=4$ oraz $(x,y)=(\frac{1}{2}(5+\sqrt{5}),\frac{1}{2}(5-\sqrt{5}))$ dla $a=\frac{5}{2}$.

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt D leży na boku AC, a punkt E wybrany jest w taki sposób, że czworokąt $ABED$ jest równoległobokiem. Symetralna odcinka DE przecina odcinek BC w punkcie P. Udowodnij, że $AD=CP$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie przeprowadzimy w przypadku, gdy punkty C i P leżą po tej samej stronie prostej DE (rys. 4). Jeżeli punkty C i P leżą po przeciwnych stronach prostej DE, dowód przebiega analogicznie.



rys. 4

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia odcinków BC i DE. Trójkąt DQC jest równoramienny, więc $\sphericalangle QDC=\sphericalangle DQC$. Ponadto, skoro punkt P leży na symetralnej odcinka DE, to $PD=PE$, a w konsekwencji $\sphericalangle DEP=\sphericalangle EDP$. Łącząc uzyskane równości kątów, otrzymujemy

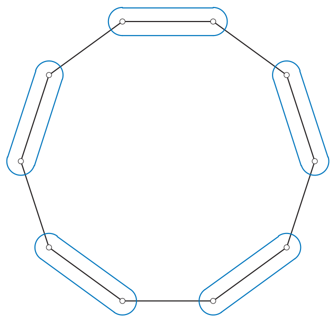
$$\begin{aligned}\sphericalangle EPQ &= 180^\circ-\sphericalangle EQP-\sphericalangle QEP=\\ &=\sphericalangle DQC-\sphericalangle DEP=\sphericalangle QDC-\sphericalangle EDP=\sphericalangle PDC.\end{aligned}$$

Proste AC i BE są równoległe, więc $\sphericalangle DCP = \sphericalangle PBE$, a ponadto $PD = PE$. Stąd wniosek, że trójkąty PCD i EBP są przystające (cecha kąt–bok–kąt). W takim razie $AD = BE = CP$, co kończy dowód.

Zadanie 7. Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko. Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis. Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.

Rozwiązanie

Opiszemy strategię Bartka. Podzielmy wierzchołki 100-kąta na 50 par sąsiednich wierzchołków (rys. 5 przedstawia analogiczny podział dla dziesięciokąta foremnego). Jeżeli Ania pokoloruje jeden z wierzchołków należących do danej pary, w swoim ruchu Bartek koloruje drugi z wierzchołków w tej parze.

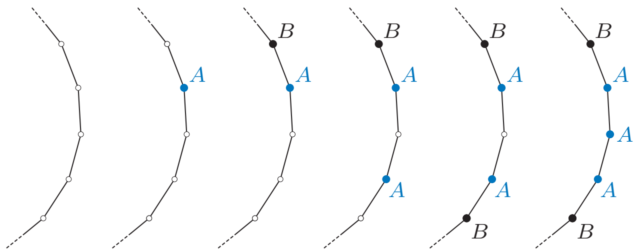


rys. 5

Przy takim sposobie gry po każdym ruchu Bartka, w każdej z 50 par znajdują się albo dwa niepokolorowane wierzchołki, albo po jednym wierzchołku czerwonym i niebieskim. Jednak aby wygrać, Ania musi doprowadzić do sytuacji, w której pewna z wyróżnionych par będzie zawierała dwa czerwone wierzchołki, gdyż tylko wtedy będzie mogła istnieć trójka kolejnych czerwonych wierzchołków. To oznacza, że Ania nie wygra, jeśli Bartek będzie grał w opisany sposób.

Uwaga 1.

Bardzo istotne jest precyzyjne opisanie strategii Bartka. Niektórzy uczestnicy Ligi pisali następująco: „Bartek zawsze koloruje wierzchołek *obok* ostatnio pokolorowanego przez Anię”. Takie sformułowanie strategii Bartka jest błędne, gdyż wówczas mógłby przydarzyć się następujący ciąg ruchów, prowadzący do wygranej Ani (rys. 6).



rys. 6

Na powyższym rysunku przez A i B oznaczamy wierzchołki pokolorowane odpowiednio przez Anię i Bartka.

Uwaga 2.

W przedstawionym rozwiązaniu skorzystaliśmy z faktu, że liczba wierzchołków rozważanego wielokąta jest parzysta. Okazuje się, że Bartek ma strategię nieprzegrywającą również, gdy rozważany wielokąt ma nieparzystą liczbę wierzchołków. Zachęcamy Czytelnika do znalezienia takiej strategii.

Zadanie 8. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a,b,c), dla których

$$a+b+c=1 \quad \text{oraz} \quad 3(a+bc)=4(b+ca)=5(c+ab).$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia $x=1-a$, $y=1-b$, $z=1-c$. Zauważmy, że skoro $a+b+c=1$, to

$$a+bc=1-b-c+bc=(1-b)-c(1-b)=(1-b)(1-c)=yz.$$

Analogicznie uzyskujemy równości $b+ca=zx$ oraz $c+ab=xy$. W takim razie

$$3yz=4zx=5xy. \qquad (*)$$

Jeżeli któryś z iloczynów yz, zx, xy jest równy 0, to każdy z nich jest równy 0, a wtedy co najmniej dwie z liczb x, y, z muszą być równe 0. Stąd wniosek, że w tym wypadku dwie z liczb a, b, c są równe 1, a trzecia liczba — w myśl założenia $a+b+c=1$ — jest równa -1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki (a,b,c): $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ spełniają warunki zadania.

Jeżeli z kolei trzy iloczyny powiązane zależnością $(*)$ są różne od zera, to po podzieleniu tej zależności przez $xyz\neq 0$ otrzymujemy

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{y}=\frac{5}{z}, \quad \text{czyli} \quad \frac{3}{1-a}=\frac{4}{1-b}=\frac{5}{1-c}.$$

Z powyższych związków wynika, że $1-a=3t$, $1-b=4t$, $1-c=5t$ dla pewnej liczby rzeczywistej t. Korzystając z warunku $a+b+c=1$, uzyskujemy równość

$$12t=3t+4t+5t=3-(a+b+c)=2.$$

Stąd $t=\frac{1}{6}$ i w konsekwencji $a=1-3t=\frac{1}{2}$, $b=1-4t=\frac{1}{3}$, $c=1-5t=\frac{1}{6}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a,b,c)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ spełnia warunki zadania.

Podsumowując, istnieją cztery trójki (a,b,c) spełniające warunki zadania: $(\mathbf{-1,1,1})$, $(\mathbf{1,-1,1})$, $(\mathbf{1,1,-1})$, $(\boldsymbol{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}})$.

Zadanie 9. Czy istnieje liczba naturalna n, dla której $(n+2)$-cyfrowa liczba

$$9\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ dwójek}}9$$

jest podzielna przez 2013? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenie $A_k=922\ldots29$ (k dwójek). Przypuśćmy, że istnieje liczba n o własności opisanej w treści zadania. Zakładamy więc, że A_n jest liczbą podzielną przez 2013.

Ponieważ $2013=3\cdot11\cdot61$, więc liczba A_n jest podzielna przez 61. Wówczas również liczba $A_n+61=922\ldots90$ jest podzielna przez 61, a w konsekwencji także liczba

$$\tfrac{1}{10}(A_n+61)=\tfrac{1}{10}\cdot 9\underbrace{22\ldots2}_{n-1}290=9\underbrace{22\ldots2}_{n-1}9=A_{n-1}$$

jest podzielna przez 61, gdyż liczby 61 i 10 są względnie pierwsze. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla liczb A_{n-1}, A_{n-2} itd. dochodzimy do wniosku, że liczby postaci $922\ldots29$, mające coraz mniej dwójek, dzielą się przez 61. Ostatecznie uzyskujemy, że $A_0=99$ jest liczbą podzielną przez 61, a to nie jest prawdą. Otrzymana sprzeczność oznacza, że A_n nie może być liczbą podzielną przez 61, a tym bardziej — przez 2013.

Sposób II

Zauważmy, że liczba złożona z n dziewiątek to 10^n-1, a więc liczba złożona z n dwójek to $\frac{2}{9}(10^n-1)$. W takim razie

$$A_n=9\underbrace{22\ldots2}_{n}9=9\underbrace{00\ldots0}_{n}9+\underbrace{22\ldots2}_{n}0=9\cdot10^{n+1}+9+10\cdot\tfrac{2}{9}(10^n-1).$$

Stąd

$$\begin{aligned}9A_n&=9\cdot(9\cdot10^{n+1}+9+10\cdot\tfrac{2}{9}(10^n-1))=\\&=81\cdot10^{n+1}+81+20\cdot10^n-20=83\cdot10^{n+1}+61.\end{aligned}$$

Liczba $9A_n-61=83\cdot10^{n+1}$ nie jest podzielna przez 61, więc również liczby $9A_n$ oraz A_n nie mogą być podzielne przez 61, a tym bardziej przez 2013.

Sposób III

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba

$$6\underbrace{77\ldots7}_{n}1=\underbrace{66\ldots6}_{n+1}0+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=60\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n+1}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=61\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$$

jest podzielna przez 61. Jeżeli liczba A_n byłaby podzielna przez 61, to również liczba

$$A_n + 6\underbrace{77\ldots7}_{n}1 = 16 \cdot 10^{n+1}$$

byłaby podzielna przez 61, a nie jest. Otrzymana sprzeczność oznacza, że liczba A_n nie może być podzielna przez 61.

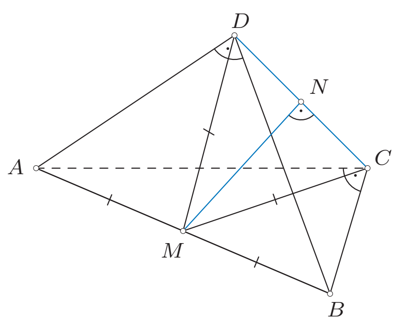
Uwaga

Chociaż $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, to w każdym z opisanych sposobów kluczowe dla otrzymania sprzeczności było skorzystanie z podzielności przez 61, a nie przez 3 czy 11. Nie jest to przypadek. Korzystając z cech podzielności przez 3 i przez 11, można się przekonać, że jeśli n jest liczbą parzystą, to A_n jest liczbą podzielną przez 11, a jeśli n jest liczbą podzielną przez 3, to A_n jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie 10. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = 5$, $CD = 3$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$. Znajdź długość odcinka łączącego środki krawędzi AB i CD.

Rozwiązanie

Oznaczmy środki odcinków AB i CD odpowiednio przez M i N (rys. 7). Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc M jest środkiem okręgu o średnicy AB opisanego na tym trójkącie, a tym samym $MC = \frac{5}{2}$.



rys. 7

Analogicznie, skoro trójkąt ABD jest prostokątny, to $MD = \frac{5}{2}$. Trójkąt CDM jest więc równoramienny, a zatem punkt N, jako środek podstawy CD, jest również spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka M. W takim razie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CMN, uzyskujemy równość

$$MN^2 = CM^2 - CN^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4,$$

a zatem szukana długość odcinka MN wynosi **2**.

Zadanie 11. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których wartość iloczynu

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(3-\frac{3}{4}\right)\ldots\left(n-\frac{n}{n+1}\right)$$

jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy z czynników rozpatrywanego iloczynu można zapisać następująco

$$k-\frac{k}{k+1}=\frac{k(k+1)}{k+1}-\frac{k}{k+1}=\frac{k^2+k-k}{k+1}=k\cdot\frac{k}{k+1}$$

dla pewnej liczby naturalnej k. Dany iloczyn możemy zatem przepisać jako

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot n\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Po skróceniu otrzymujemy postać

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n+1}.$$

W takim razie szukamy tych wartości n, dla których liczba $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ jest podzielna przez $n+1$.

Żądana podzielność nie może zachodzić, gdy $n+1$ jest liczbą pierwszą: $n+1$ nie występuje wówczas w rozkładzie na czynniki żadnej liczby mniejszej od siebie, czyli żadnego czynnika iloczynu $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Załóżmy, że $n+1$ jest liczbą złożoną. Przypuśćmy, że liczbę $n+1$ można przedstawić jako iloczyn dwóch różnych liczb naturalnych większych od 1, czyli $n+1=km$ dla pewnych liczb naturalnych k, m takich, że $1<k<m<n$. Wówczas żądana podzielność zachodzi, gdyż iloczyn $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot\ldots\cdot m\cdot\ldots\cdot n$ jest podzielny przez $km=n+1$.

Jeżeli liczby $n+1$ nie można przedstawić w sposób opisany w poprzednim akapicie, to musi być ona kwadratem pewnej liczby pierwszej p. Jednak jeżeli $p>2$, to $2p<p^2=n+1$. To oznacza, że obie liczby p i $2p$ są mniejsze od $n+1$, a zatem iloczyn $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p\cdot\ldots\cdot 2p\cdot\ldots\cdot n$ jest podzielny przez $p\cdot 2p=2p^2=2(n+1)$, czyli tym bardziej przez $n+1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $p=2$, czyli gdy $n=3$, rozważany iloczyn przyjmuje wartość $\frac{3}{2}$, nie jest więc liczbą naturalną. Rozważyliśmy wszystkie przypadki, więc możemy sformułować odpowiedź: warunki zadania spełniają te liczby $n\geqslant 4$, dla których $n+1$ jest liczbą złożoną.

Uwaga

Iloczyn $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ zwykle oznacza się jako $n!$ (czyt. „n silnia”).

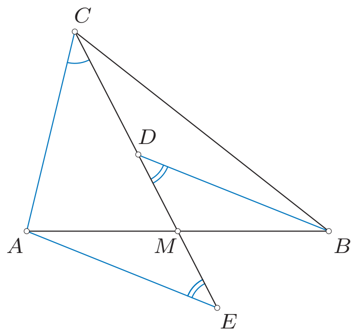
Zadanie 12. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na odcinku CM znajduje się taki punkt D, że $AC=BD$. Wykaż, że

$$\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB.$$

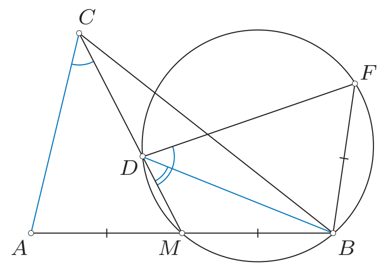
Rozwiązanie

Sposób I

Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem punktu M (rys. 8). Wówczas środki przekątnych czworokąta $AEBD$ pokrywają się, więc czworokąt ten jest równoległobokiem. Stąd $AE = BD = AC$, a zatem trójkąt ACE jest równoramienny. Wobec tego $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MEA = \sphericalangle MDB$, co należało wykazać.



rys. 8



rys. 9

Sposób II

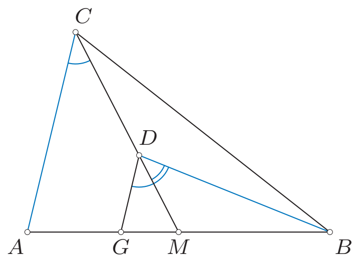
Niech F będzie takim punktem, że trójkąty AMC i BFD są przystające, a przy tym punkty F i M leżą po przeciwnych stronach prostej BD (rys. 9). Z równości $\sphericalangle BMD + \sphericalangle BFD = \sphericalangle BMD + \sphericalangle AMC = 180°$ wynika, że na czworokącie $BFDM$ można opisać okrąg. Kąty MDB i FDB, jako wpisane w ten okrąg i oparte na cięciwach równej długości, są również oparte na łukach równej długości, więc mają równe miary. Stąd $\sphericalangle MDB = \sphericalangle FDB = \sphericalangle MCA$.

Sposób III

Niech G będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą przechodzącą przez punkt D równoległą do prostej AC (rys. 10). Wówczas trójkąty MCA i MDG są podobne (cecha kąt–kąt). Stąd i z równości $AM = BM$, $AC = BD$ wynika, że

$$\frac{GM}{GD} = \frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BD}, \quad \text{czyli} \quad \frac{GM}{BM} = \frac{GD}{BD}.$$

Ale punkt M należy do wnętrza odcinka BG, więc powyższa równość oznacza, że $\sphericalangle MDB = \sphericalangle MDG$ (korzystamy z twierdzenia odwrotnego do *twierdzenia o dwusiecznej*). Łącząc tę równość kątów z $\sphericalangle MDG = \sphericalangle MCA$, uzyskujemy tezę zadania.



rys. 10

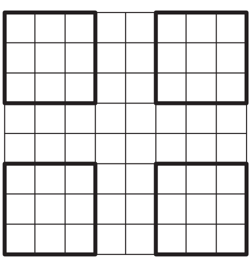
Uwaga

Teza zadania jest także prostym wnioskiem z *twierdzenia sinusów*. Czytelnikom znającym to twierdzenie pozostawiamy rozwiązanie zadania z jego użyciem jako ćwiczenie.

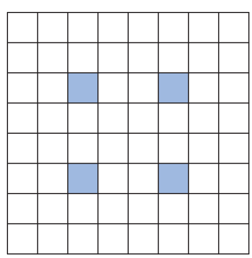
Zadanie 13. Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba czarnych pól. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba białych pól w całej tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że w każdym kwadracie 3×3 musi znaleźć się nieparzysta liczba białych pól, czyli co najmniej jedno. Ponadto możemy wskazać cztery kwadraty 3×3, z których żadne dwa nie mają pól wspólnych (rys. 11). Skoro w każdym z tych kwadratów jest co najmniej jedno białe pole, to w całej tablicy są co najmniej cztery białe pola.



rys. 11



rys. 12

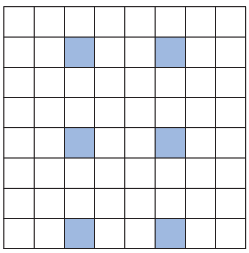
Z drugiej strony, jeżeli na biało pomalujemy cztery pola wyróżnione na rysunku 12 (a pozostałe pola na czarno), to warunki zadania będą spełnione. Istotnie, w każdym kwadracie 3×3 znajdzie się wówczas dokładnie 8, czyli parzysta liczba czarnych pól. W związku z tym najmniejsza możliwa liczba białych pól wynosi **4**.

Uwaga 1.

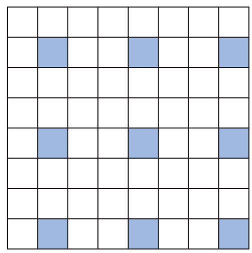
Rozwiązując zadanie należy uważać, aby poprawnie uzasadnić, że w tablicy muszą znaleźć się co najmniej 4 białe pola. Przyjrzyjmy się jednemu z błędnych rozumowań.

„W każdym kwadracie 3×3 musi znajdować się nieparzysta liczba białych pól, czyli co najmniej jedno. Najmniejszą możliwą liczbę białych pól w całej tablicy otrzymamy więc wtedy, gdy w każdym kwadracie 3×3 będzie znajdowało się *dokładnie jedno* białe pole. Sposób kolorowania z rysunku 12 ma tę własność, więc szukana najmniejsza liczba wynosi 4."

Z powyższego rozumowania nie wynika, że 4 to najmniejsza możliwa liczba białych pól! Spójrzmy na rysunki 13 i 14 — na nich także każdy kwadrat 3×3 pokrywa *dokładnie jedno* białe pole, a wiemy przecież, że białych pól może być mniej (rys. 12).



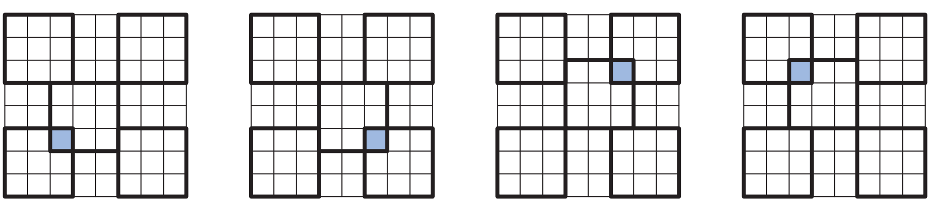
rys. 13



rys. 14

Uwaga 2.

Na rysunku 12 przedstawiony jest *jedyny* układ czterech białych pól, dla którego spełnione są warunki zadania. Nietrudno się o tym przekonać, wystarczy lekko zmodyfikować rysunek 11, dodając jeszcze jeden wyróżniony kwadrat 3×3 (rys. 15).



rys. 15

Na każdym z powyższych rysunków jest pięć wyróżnionych kwadratów 3×3, a chcemy, aby tylko cztery pola były białe. W takim razie dwa z wyróżnionych kwadratów muszą pokrywać to samo białe pole, ale na każdym rysunku jest tylko jedno pole pokryte przez dwa kwadraty. Stąd wniosek, że każde z tych pól musi być białe.

Zadanie 14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$(a+b)(c+d)=(a+c)(b+d)=(a+d)(b+c).$$

Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

Rozwiązanie

Sposób I

Przekształcając równoważnie związek $(a+b)(c+d)=(a+c)(b+d)$, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} ac+bc+ad+bd &= ab+bc+ad+cd, \\ ac+bd &= ab+cd, \\ a(c-b) &= d(c-b), \\ (a-d)(c-b) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy dwa przypadki: **(1)** $a=d$ lub **(2)** $b=c$.

Analogicznie równość $(a+b)(c+d)=(a+d)(b+c)$ możemy doprowadzić do postaci $(a-c)(d-b)=0$. Znów są dwie możliwości: **(A)** $a=c$ lub **(B)** $b=d$.

Łącznie do rozpatrzenia są więc cztery sytuacje. Pozostaje zauważyć, że:

- jeżeli **(1)** oraz **(A)**, to zachodzą równości $a=c=d$,
- jeżeli **(1)** oraz **(B)**, to zachodzą równości $a=b=d$,
- jeżeli **(2)** oraz **(A)**, to zachodzą równości $a=b=c$,
- jeżeli **(2)** oraz **(B)**, to zachodzą równości $b=c=d$.

W każdym przypadku otrzymaliśmy równość pewnych trzech spośród liczb a, b, c, d, więc rozwiązanie jest zakończone.

Sposób II

Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$(x-a-b)(x-c-d)=(x-a-c)(x-b-d)=(x-a-d)(x-b-c),$$

gdyż każdy z powyższych trzech iloczynów jest równy $x^2-x(a+b+c+d)+S$, gdzie $S=(a+b)(c+d)=(a+c)(b+d)=(a+d)(b+c)$. Podstawiając $x=a+b$, otrzymujemy

$$0=(b-c)(a-d)=(b-d)(a-c).$$

Dalsze rozumowanie przebiega jak w poprzednim sposobie.

Uwaga

Można zauważyć, że bezpośrednio z tożsamości przedstawionej w drugim sposobie rozwiązania wynikają równości zbiorów

$$\{a+b,c+d\}=\{a+c,b+d\}=\{a+d,b+c\}=\{x_1,x_2\},$$

gdzie x_1, x_2 to (niekoniecznie różne) liczby rzeczywiste, będące rozwiązaniami równania kwadratowego $x^2-x(a+b+c+d)+S=0$.

Zadanie 15. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a,b), dla których

$$\mathrm{NWD}(a^2+1,b^2+1)=a+b.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy, że para $(a,b)=(a,a^2-a+1)$ spełnia warunki zadania dla każdej liczby naturalnej a.

Liczba a^2+1 jest podzielna przez liczbę $a+b=a^2+1$, a przy tym nie może mieć większego dzielnika. Pozostaje wykazać, że liczba

$$b^2+1=(a^2-a+1)^2+1$$

również jest podzielna przez $a+b=a^2+1$. Wynika to z następującego rachunku

$$\begin{aligned}(a^2-a+1)^2+1 &= ((a^2-a+1)^2-a^2)+(a^2+1)=\\ &=(a^2-2a+1)(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(a^2-2a+2).\end{aligned}$$

Uwaga

Pary postaci (a,a^2-a+1) nie są wszystkimi rozwiązaniami równania $\mathrm{NWD}(a^2+1,b^2+1)=a+b$. Inny nieskończony zbiór par spełniających warunki zadania możemy znaleźć korzystając z własności *ciągu Fibonacciego*. Ciąg ten definiujemy rekurencyjnie następująco

$$F_0=0,\quad F_1=1\quad \text{oraz}\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad \text{dla } n\geqslant 2.$$

Przy pomocy indukcji matematycznej można wykazać, że równości

$$F_{2k-1}^2+1=F_{2k-3}F_{2k+1}\quad \text{oraz}\quad F_{2k}^2+1=F_{2k-1}F_{2k+1}$$

zachodzą dla każdej liczby całkowitej dodatniej k (przyjmujemy $F_{-1}=1$). Ponadto dowolne dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego są względnie pierwsze (jest to prosty wniosek np. z *algorytmu Euklidesa*). Przeprowadzenie dowodów pozostawiamy Czytelnikowi.

Przytoczone własności pozwalają stwierdzić, że para $(a,b)=(F_{2k-1},F_{2k})$ stanowi rozwiązanie zadania dla każdej liczby całkowitej dodatniej k. Istotnie, liczba $a+b=F_{2k-1}+F_{2k}=F_{2k+1}$ jest dzielnikiem zarówno a^2+1, jak również b^2+1. Ponadto $a+b$ jest największym wspólnym dzielnikiem tych dwóch liczb, gdyż liczby

$$\frac{a^2+1}{a+b}=F_{2k-3}\quad \text{oraz}\quad \frac{b^2+1}{a+b}=F_{2k-1}$$

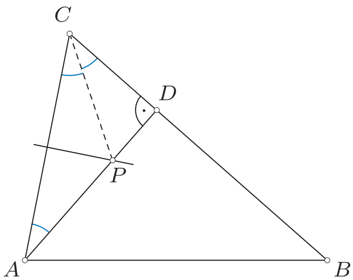
mają taki sam największy wspólny dzielnik, jak liczby $F_{2k-1}-F_{2k-3}=F_{2k-2}$ oraz F_{2k-1}, czyli są względnie pierwsze.

Zadanie 16. W trójkącie ostrokątnym ABC symetralna boku AC i wysokość poprowadzona do boku BC przecinają się na dwusiecznej kąta ACB. Wykaż, że symetralna boku BC i wysokość poprowadzona do boku AC również przecinają się na dwusiecznej kąta ACB.

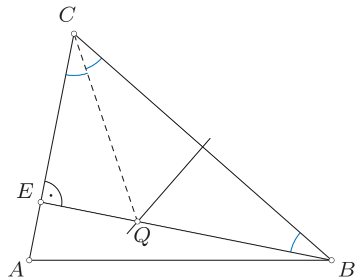
Rozwiązanie

Sposób I

Niech P będzie punktem wspólnym symetralnej boku AC i wysokości AD poprowadzonej do boku BC (rys. 16).



rys. 16



rys. 17

Z treści zadania wynika, że $\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCD$. Ponadto trójkąt ACP jest równoramienny, gdyż punkt P leży na symetralnej odcinka AC, skąd $\sphericalangle ACP = \sphericalangle CAP$. W trójkącie prostokątnym ACD otrzymujemy zatem

$$90^\circ = \sphericalangle ACP + \sphericalangle PCD + \sphericalangle CAP = 3 \cdot \sphericalangle ACP,$$

skąd $\sphericalangle ACP = 30^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Niech Q będzie punktem wspólnym symetralnej boku BC i wysokości BE poprowadzonej do boku AC (rys. 17). W trójkącie prostokątnym BCE zachodzą wówczas równości $\sphericalangle CBE = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Ponadto trójkąt BCQ jest równoramienny (Q leży na symetralnej odcinka BC), więc $\sphericalangle QCB = \sphericalangle QBC = 30^\circ$. Stąd wynika, że

$$\sphericalangle ACQ = \sphericalangle ACB - \sphericalangle QCB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \sphericalangle QCB,$$

czyli punkt Q leży na dwusiecznej kąta ACB.

Sposób II

Trójkąty prostokątne ADC i BEC mają wspólny kąt przy wierzchołku C, więc są podobne (cecha kąt–kąt). Stąd wniosek, że jeżeli w jednym z tych trójkątów symetralna przeciwprostokątnej i dwusieczna kąta ostrego przecinają się na odpowiedniej przyprostokątnej, to w drugim także.

Zadanie 17. Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.

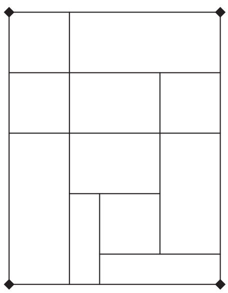
Rozwiązanie

Punkt nazwiemy *szczególnym*, jeśli jest wierzchołkiem co najmniej jednego małego prostokąta. Możemy wskazać trzy rodzaje szczególnych punktów:

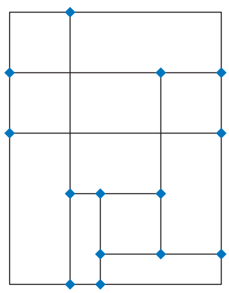
A Punkty, które są wierzchołkami dokładnie jednego małego prostokąta. Takie punkty są cztery i pokrywają się z wierzchołkami wyjściowego prostokąta (rys. 18).

B Punkty, które są wierzchołkami dokładnie dwóch małych prostokątów, czyli punkty wyróżnione (rys. 19). Oznaczmy ich liczbę przez n.

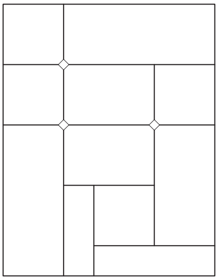
C Punkty, które są wierzchołkami dokładnie czterech małych prostokątów (rys. 20). Oznaczmy ich liczbę przez k.



rys. 18



rys. 19



rys. 20

Rozwiązanie możemy dokończyć dwoma sposobami.

Sposób I

Dla każdego szczególnego punktu policzmy te małe prostokąty, których wierzchołkiem jest dany punkt, a następnie zsumujmy otrzymane wyniki. Dla punktów typu **A** uzyskujemy w sumie 4 prostokąty, dla punktów typu **B** uzyskujemy $2n$ prostokątów, a dla punktów typu **C** uzyskujemy $4k$ prostokątów. Dla wszystkich typów łącznie otrzymujemy liczbę

$$S=4+2n+4k.$$

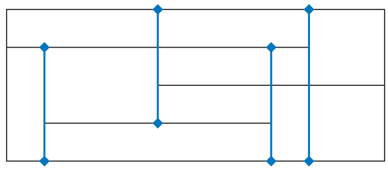
Z drugiej strony liczba S jest równa czterokrotności liczby *małych* prostokątów, gdyż każdy taki prostokąt został policzony czterokrotnie, dla każdego z jego wierzchołków. W takim razie liczba

$$\frac{S}{4}=1+\frac{n}{2}+k,$$

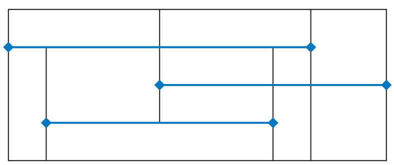
czyli liczba wszystkich małych prostokątów, jest naturalna. To zaś oznacza, że liczba $\frac{n}{2}$ jest całkowita, czyli n jest liczbą podzielną przez 2, a to właśnie należało wykazać.

Sposób II

Narysowane odcinki, dzielące prostokąt na małe prostokąty, nazwiemy *działowymi*. Zakładamy przy tym, że odcinki działowe mają maksymalne długości, tzn. żadnego z nich nie można wydłużyć o inny odcinek działowy. W naturalny sposób możemy podzielić odcinki działowe na *pionowe* (rys. 21) i *poziome* (rys. 22).



rys. 21



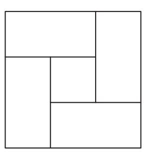
rys. 22

Zauważmy, że każdy odcinek działowy musi mieć końce w punktach typu **B**. Rzeczywiście, odcinki działowe nie przebiegają wzdłuż boków prostokąta, nie mogą mieć więc końców typu **A**. Z kolei każdy punkt typu **C** musi być punktem przecięcia odcinków działowych pionowego i poziomego.

Na odwrót, każdy punkt typu **B**, czyli punkt wyróżniony, jest końcem dokładnie jednego odcinka działowego (oraz punktem wewnętrznym innego odcinka działowego lub boku wyjściowego prostokąta). To oznacza, że liczba wyróżnionych punktów jest dwukrotnie większa od liczby odcinków działowych, a więc jest parzysta.

Uwaga

Niektórzy uczestnicy Ligi próbowali rozwiązywać zadanie, usuwając kolejne odcinki działowe i redukując liczbę małych prostokątów. Przy tego typu rozumowaniach należy bardzo uważać — istnieją takie podziały prostokąta na małe prostokąty, że nie da się usunąć *tylko* jednego odcinka tak, by otrzymać inny podział na małe prostokąty (rys. 23).



rys. 23

Zadanie 18. Dodatnie liczby wymierne a, b, c spełniają równość $a^2+b^2+c^2=abc$. Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ca)(c^3+ab)}$$

jest wymierna.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $a^2 = abc - b^2 - c^2$, a zatem zachodzi równość

$$a^3 + bc = a(abc - b^2 - c^2) + bc = ab \cdot ca - ab \cdot b - ca \cdot c + b \cdot c = (ab - c)(ca - b).$$

W analogiczny sposób dochodzimy do wniosku, że

$$b^3 + ca = (bc - a)(ab - c) \quad \text{oraz} \quad c^3 + ab = (ca - b)(bc - a).$$

Korzystając z otrzymanych związków, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ca)(c^3+ab)} &= \sqrt{(ab-c)^2(bc-a)^2(ca-b)^2} = \\ &= |(ab-c)(bc-a)(ca-b)|,\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie, gdyż $|(ab-c)(bc-a)(ca-b)|$ jest liczbą wymierną.

Uwaga

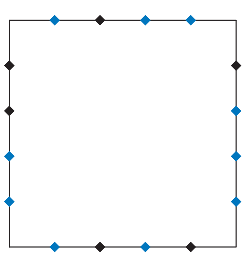
Można udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek dodatnich liczb całkowitych (a, b, c), które spełniają równość $a^2 + b^2 + c^2 = abc$. Trójki te są ściśle związane z rozwiązaniami *równania Markowa*, czyli równania diofantycznego $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Zachęcamy Czytelnika do wykazania, że jeżeli dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość $a^2+b^2+c^2=abc$, to wszystkie one dzielą się przez 3, a trójka $(x, y, z) = (\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3})$ jest rozwiązaniem równania Markowa.

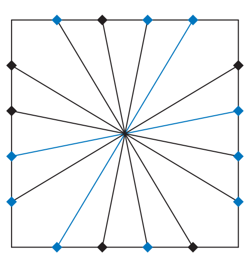
Zadanie 19. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.

Rozwiązanie

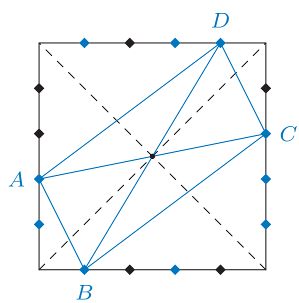
Weźmy pod uwagę $4(n-1)$ punktów, które, wraz z wierzchołkami, dzielą brzeg kwadratu na odcinki jednostkowe i nazwijmy te punkty *kratowymi*. Zauważmy, że każdy wyróżniony punkt musi być punktem kratowym, bo każdy odcinek całkowitej długości otrzymany po wyborze wyróżnionych punktów składa się z całkowitej liczby odcinków jednostkowych (rys. 24).



rys. 24



rys. 25



rys. 26

Punkty kratowe możemy połączyć w $2(n-1)=2n-2$ par punktów symetrycznych względem środka kwadratu (na rysunku 25 punkty każdej pary połączono odcinkiem). Skoro wyróżnionych jest $2n$ punktów, to co najmniej dwie z opisanych par, powiedzmy A, C oraz B, D muszą mieć oba punkty wyróżnione. Te dwie pary punktów wyznaczają czworokąt $ABCD$, który ma środek symetrii, czyli jest równoległobokiem. Ponadto środek symetrii tego równoległoboku, czyli środek każdej z przekątnych AC, BD, pokrywa się z środkiem kwadratu (rys. 26).

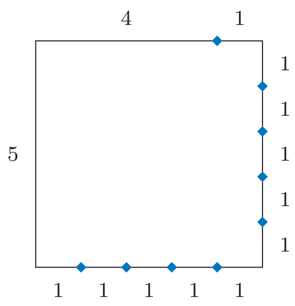
Uwaga 1.

Opisane rozwiązanie przenosi się na ogólniejszą wersję zadania, w której rozważamy prostokąt $m \times n$, na brzegu którego wyróżniono $m+n$ punktów.

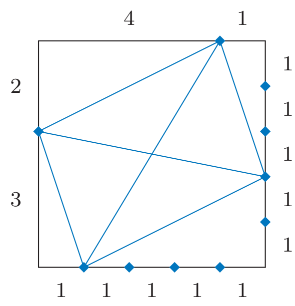
Uwaga 2.

Warunek zadania, by środki równoległoboku i kwadratu pokrywały się, wydaje się dość sztuczny. Pozwala on co najwyżej uniknąć konieczności precyzowania w treści zadania, że czterech wyróżnionych punktów, które znajdują się na tym samym boku kwadratu, nie traktujemy jak wierzchołki równoległoboku. Można przypuszczać, że ów dodatkowy warunek utrudnia znalezienie odpowiedniego równoległoboku, tymczasem okazuje się, że nawet je ułatwia!

Rysunek 27 pokazuje, że istnieje konfiguracja $2n-1$ wyróżnionych punktów, dla której nie można wskazać żadnego równoległoboku o wierzchołkach w wyróżnionych punktach. W takim razie pomijając omawiany warunek, nadal potrzebnych jest co najmniej $2n$ wyróżnionych punktów.



rys. 27



rys. 28

Z kolei na rysunku 28 pokazana jest taka konfiguracja wyróżnionych punktów, w której jedyny równoległobok o wyróżnionych wierzchołkach ma boki nierównoległe do boków kwadratu, a jego środek pokrywa się ze środkiem kwadratu. Wydaje się więc, że pominięcie warunku o wspólnym środku wcale nie musi spowodować istnienia prostszego rozwiązania.

Zadanie 20. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych (p,q,r), dla których

$$\frac{p^2+q}{q^2+p}=r \quad \text{oraz} \quad \frac{p^2+r}{r^2+p}=q.$$

Rozwiązanie

Dane dwie równości możemy przepisać równoważnie jako

$$p^2+q=q^2r+pr \quad \text{oraz} \quad p^2+r=r^2q+pq.$$

Odejmując drugą równość stronami od pierwszej, otrzymujemy

$$q-r=qr(q-r)-p(q-r), \quad \text{czyli} \quad (q-r)(1-qr+p)=0.$$

Stąd $q=r$ lub $p=qr-1$.

Jeżeli $q=r$, to każda z dwóch początkowych równości przybiera postać $p^2=q^3+q^2-q$, skąd wynika że p^2 jest liczbą podzielną przez q, a tym samym $p=q$. W takim razie uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} q^2 &= q^3+q^2-q, \\ q^3-q &= 0, \\ q(q-1)(q+1) &= 0, \end{aligned}$$

ale żadna z liczb 0, 1, -1 nie jest pierwsza. Stąd wniosek, że w przypadku $q=r$ nie ma rozwiązań.

Jeżeli $p=qr-1$, to liczba p musi być nieparzysta. Rzeczywiście, skoro $q\geqslant 2$ oraz $r\geqslant 2$, to $p=qr-1\geqslant 2\cdot 2-1=3$. To oznacza, że liczba $qr=p+1$ jest parzysta, a w związku z tym jedna z liczb q, r musi być równa 2. Z uwagi na symetrię możemy założyć, że $q=2$.

Z pierwszej danej w treści zadania równości wnosimy, że

$$r=\frac{p^2+2}{p+4}=\frac{(p-4)(p+4)+18}{p+4}=p-4+\frac{18}{p+4}.$$

Wobec tego liczba $p+4$ musi być dzielnikiem 18, czyli jedną z liczb 1, 2, 3, 6, 9, 18. Tylko w dwóch przypadkach liczba p okazuje się pierwsza: $p=2$ lub $p=5$. Jeżeli $p=2$, to $r=2-4+\frac{18}{6}=1$, a 1 nie jest liczbą pierwszą. W przypadku $p=5$ otrzymujemy $r=5-4+\frac{18}{9}=3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(p,q,r)=(5,2,3)$ spełnia warunki zadania.

Przy założeniu $r=2$ analogicznie uzyskamy trójkę $(p,q,r)=(5,3,2)$. Istnieją więc dwie trójki liczb pierwszych (p,q,r), będące rozwiązaniami danego układu równań: $(\mathbf{5},\mathbf{2},\mathbf{3})$ oraz $(\mathbf{5},\mathbf{3},\mathbf{2})$.

Uwaga

Zadanie można także rozwiązać bez założenia, że p, q, r są liczbami pierwszymi. Przedstawimy rozwiązanie układu równań

$$\frac{a^2+b}{b^2+a}=c \quad \text{oraz} \quad \frac{a^2+c}{c^2+a}=b$$

w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c.

Na początku, podobnie jak w rozwiązaniu zadania, dochodzimy do zależności $(b-c)(1-bc+a)=0$, z której wynika, że $b=c$ lub $a=bc-1$.

1° Jeżeli $b=c$, to każde z danych równań przybiera postać $a^2+b=b^3+ab$, czyli $a^2=b(b^2+a-1)$. Dla $b=1$ otrzymujemy stąd $a^2=a$, czyli $a=1$.

Przyjmijmy, że $b\neq 1$ oraz niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby b. Z równości $a^2=b(b^2+a-1)$ wynika, że b dzieli a^2, czyli w szczególności p dzieli a. W konsekwencji liczba b^2+a-1 nie może być podzielna przez p. Wobec dowolności p oznacza to, że liczby b i b^2+a-1 są względnie pierwsze. W takim razie z zależności $a^2=b(b^2+a-1)$ wnioskujemy, że

$$b=n^2 \quad \text{oraz} \quad b^2+a-1=k^2$$

dla pewnych liczb całkowitych dodatnich n, k. Stąd w szczególności $a=nk$.

Wobec tego równanie $b^2+a-1=k^2$ przybiera postać:

$$k^2=n^4+nk-1, \quad \text{czyli} \quad 4n^4+n^2-4=(2k-n)^2.$$

Jednak skoro $b\neq 1$, to $n\geqslant 2$ i $4n^4+n^2-4\geqslant(2n^2)^2$, przy czym równość zachodzi jedynie gdy $n=2$. Z drugiej strony

$$4n^4+n^2-4<4n^4+4n^2+1=(2n^2+1)^2.$$

Łącząc uzyskane nierówności z zależnością $4n^4+n^2-4=(2k-n)^2$, uzyskujemy $(2n^2)^2\leqslant(2k-n)^2<(2n^2+1)^2$, więc musi zachodzić równość $2n^2=2k-n$. Stąd $n=2$ i w konsekwencji $k=5$, co daje trójkę $(a,b,c)=(10,4,4)$.

2° Jeżeli $a=bc-1$, to pierwsza z zadanych równości przepisuje się jako

$$\begin{aligned} a^2+b &= b^2c+ac, \\ a(a-c) &= b(bc-1), \\ a-c &= b, \end{aligned}$$

czyli $a=b+c$. W takim razie

$$\begin{aligned} bc-1 &= b+c, \\ bc-b-c+1 &= 2, \\ (b-1)(c-1) &= 2, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $(b,c)=(2,3)$ lub $(b,c)=(3,2)$. W obu przypadkach $a=5$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie znalezione trójki spełniają wyjściowy układ równań. Wobec tego rozwiązaniami są następujące trójki (a,b,c) liczb całkowitych dodatnich: $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$, $(\mathbf{10},\mathbf{4},\mathbf{4})$, $(\mathbf{5},\mathbf{2},\mathbf{3})$, $(\mathbf{5},\mathbf{3},\mathbf{2})$.

Zadanie 21. Wyznacz wszystkie takie pary liczb naturalnych (a,b), że a^2+b^2 jest liczbą pierwszą i $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Sposób I

Przyjmijmy, że $a^2+b^2=p$ oraz $2ab=n^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą naturalną. Wówczas

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=p+n^2, \quad \text{skąd} \quad p=(a+b)^2-n^2=(a+b-n)(a+b+n).$$

Liczby p i $a+b+n$ są dodatnie, więc $a+b-n$ również jest liczbą dodatnią. Ponadto, skoro p jest liczbą pierwszą, to $a+b-n=1$ oraz $a+b+n=p$. Z pierwszej równości otrzymujemy $n=a+b-1$, czyli kolejno

$$\begin{aligned}(a+b-1)^2 &= 2ab,\\ a^2+b^2+1+2ab-2a-2b &= 2ab,\\ a^2-2a+1+b^2-2b+1 &= 1,\\ (a-1)^2+(b-1)^2 &= 1.\end{aligned}$$

Stąd wniosek, że $a=1$ i $b=2$ lub $a=2$ i $b=1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że w obu przypadkach $p=a+b+n=2+1+2=5$ jest liczbą pierwszą. Warunki zadania spełniają zatem dwie pary (a,b): $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ oraz $(\mathbf{2},\mathbf{1})$.

Sposób II

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Wówczas liczba a^2+b^2 jest podzielna przez d^2. Stąd, aby ta liczba była pierwsza, musi zachodzić równość $d=1$.

Skoro liczby a i b nie mają wspólnego dzielnika większego od 1 oraz $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej, to jedna z liczb a, b jest kwadratem liczby naturalnej, a druga — dwukrotnością kwadratu liczby naturalnej. Bez starty ogólności przyjmijmy, że $a=m^2$ oraz $b=2n^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

Po wprowadzeniu przyjętych oznaczeń uzyskujemy

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= m^4+4n^4=\\ &= m^4+4m^2n^2+4n^4-4m^2n^2=\\ &= (m^2+2n^2)^2-(2mn)^2=\\ &= (m^2-2mn+2n^2)(m^2+2mn+2n^2).\end{aligned}$$

Skoro powyższa liczba ma być pierwsza, to musi zachodzić równość

$$m^2-2mn+2n^2=1, \quad \text{czyli} \quad (m-n)^2+n^2=1.$$

Jednak $n>0$, więc $n=1$, skąd $m-n=0$, czyli $m=n=1$. Otrzymujemy parę $(a,b)=(1,2)$, która spełnia warunki zadania.

Przyjmując, że a jest dwukrotnością kwadratu liczby naturalnej, a b jest kwadratem liczby naturalnej, otrzymujemy drugą parę: $(a,b)=(2,1)$.

Uwaga 1.

Równość $m^4+4n^4=(m^2-2mn+2n^2)(m^2+2mn+2n^2)$, z której skorzystaliśmy w drugim sposobie rozwiązania, nazywana jest *tożsamością Sophie Germain.*

Uwaga 2.

Można udowodnić, że jeżeli liczba naturalna posiada dwa *różne* przedstawienia w postaci sumy dwóch kwadratów liczb naturalnych, to jest złożona. W szczególności, jeżeli $p=x^2+y^2=z^2+t^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a x,

y, z, t są dodatnimi liczbami całkowitymi, to $\{x,y\}=\{z,t\}$. Wykorzystamy ten fakt w następnym rozwiązaniu naszego zadania.

Sposób III

Odejmując stronami równości $p=a^2+b^2$ oraz $n^2=2ab$ (oznaczenia jak w pierwszym sposobie), otrzymujemy

$$p-n^2=(a-b)^2, \quad \text{skąd} \quad (a-b)^2+n^2=p=a^2+b^2.$$

Korzystając z obserwacji ujętej w drugiej uwadze, dochodzimy do wniosku, że $\{a,b\}=\{|a-b|,n\}$. W takim razie $n=a$ lub $n=b$.

Jeżeli $n=a$, to $a^2=2ab$, czyli $a=2b$. Stąd $p=(2b)^2+b^2=5b^2$, a skoro p ma być liczbą pierwszą, to $b=1$ i w konsekwencji $a=2$. Analogicznie jeżeli $n=b$, to uzyskujemy $a=1$ i $b=2$.

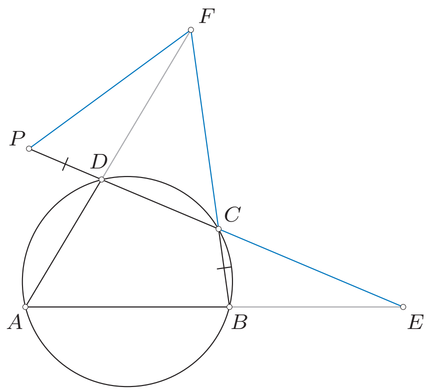
Zadanie 22. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że jeśli $BE=DF$, to $CE=CF$.

Rozwiązanie

Wybierzmy na półprostej $CD^{\to}$, poza odcinkiem CD, taki punkt P, że $BC=DP$ (rys. 29). Wówczas

$$\sphericalangle PDF=\sphericalangle ADC=180^\circ-\sphericalangle ABC=\sphericalangle CBE,$$

więc na mocy cechy bok–kąt–bok trójkąty PDF i CBE są przystające. Wobec tego $\sphericalangle DPF=\sphericalangle BCE=\sphericalangle DCF$, więc trójkąt CPF jest równoramienny. Stąd $CE=PF=CF$, co było do udowodnienia.



rys. 29

Uwaga

Istnieje również „mechaniczne” rozwiązanie zadania, korzystające z *twierdzenia sinusów* dla trójkątów CBE i CDF.

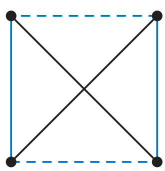
Zadanie 23. W pewnej grupie jest n osób, przy czym $n \geqslant 4$. Dowolne cztery osoby z tej grupy można usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoim znajomym i nieznajomym. Znajdź wszystkie wartości n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

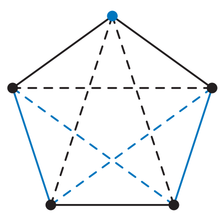
Jeżeli pewna osoba A ma co najmniej trzech znajomych B, C, D, to czwórki A, B, C, D nie da się usadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania — osoba A nie ma w tej czwórce żadnego nieznajomego, obok którego mogłaby usiąść. Stąd wniosek, że każda osoba w omawianej grupie ma co najwyżej dwóch znajomych.

Analogicznie dochodzimy do wniosku, że każda osoba w grupie ma co najwyżej dwóch nieznajomych. W takim razie $n \leqslant 1+2+2=5$.

Wykażemy, że dla $n=4$ oraz $n=5$ można wskazać grupy, dla których spełnione są warunki zadania. Na poniższych rysunkach wierzchołki oznaczają osoby, linie ciągłe — relacje znajomości, a linie przerywane — relacje nieznajomości.



rys. 30



rys. 31

W przypadku $n=4$ (rys. 30) jest tylko jeden możliwy wybór czwórki osób. Kolorowa łamana wyznacza kolejność ich siedzenia przy stole.

Dla $n=5$ (rys. 31) kolorowa kropka oznacza osobę, która nie została wybrana do czwórki sadzanej przy stole — może być nią dowolna z pięciu osób, bo we wszystkich przypadkach rysunek będzie taki sam, tylko obrócony.

Uwaga

Nierówność $n \leqslant 5$ można także uzyskać, korzystając z faktu, że w grupie co najmniej sześciu osób zawsze znajdą się albo trzy osoby, które znają się wzajemnie, albo trzy osoby, które się nie znają. Rozumowanie przebiega następująco.

Przypuśćmy, że dla pewnego $n \geqslant 6$ istnieje grupa n osób spełniająca warunki zadania. W myśl faktu sformułowanego w poprzednim akapicie, można wskazać trzy osoby A, B, C, które albo wzajemnie się znają, albo wzajemnie się nie znają. Niech D będzie dowolną inną osobą w rozważanej grupie.

Jeżeli A, B, C wzajemnie się znają, to D musi być wspólnym nieznajomym tych trzech osób, gdyż w czwórce A, B, C, D każdy musi mieć co najmniej jednego nieznajomego. Ale wówczas osoba D nie miałaby żadnego znajomego w tej czwórce, a musi mieć co najmniej jednego. Podobną sprzeczność otrzymujemy w przypadku, gdy osoby A, B, C wzajemnie się nie znają.

Najmniejszą liczbę k o tej własności, że w dowolnej grupie k osób można wskazać m osób, które wzajemnie się znają lub n osób, które wzajemnie się nie znają, nazywamy *liczbą Ramseya* i oznaczamy symbolem $k=R(m,n)$. Zachęcamy Czytelnika do wykazania, że $R(3,3)=6$, z czego skorzystaliśmy w powyższym rozwiązaniu.

Zadanie 24. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a,b), dla których liczba $4^a+4^b+4^{a+b}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że para $(a,b)=(n,2n+1)$ spełnia warunki zadania dla każdej liczby całkowitej dodatniej n. Rzeczywiście, wówczas

$$4^a+4^b+4^{a+b}=4^n+4^{2n+1}+4^{3n+1}=(2^n)^2+2\cdot 2^n\cdot 2^{3n+1}+(2^{3n+1})^2=(2^n+2^{3n+1})^2.$$

Uwaga

Po opublikowaniu rozwiązania zapytaliśmy uczestników Ligi, czy istnieją inne niż opisane w powyższym rozwiązaniu pary liczb spełniających warunki zadania. Okazuje się, że nie istnieją. Poniżej przedstawiamy dowód tego faktu, który nadesłała Bogna Pawlus, uczestniczka Ligi.

Znajdziemy wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych, dla których $4^a+4^b+4^{a+b}$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a\leqslant b$, czyli $b=a+x$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej x. Wówczas z warunków zadania wynika, że liczba

$$4^a+4^{a+x}+4^{2a+x}=(2^a)^2(1+2^{2x}+2^{2a+2x})$$

jest kwadratem pewnej liczby całkowitej. To oznacza, że $1+2^{2x}+2^{2a+2x}$ jest kwadratem pewnej dodatniej liczby całkowitej y.

Jeżeli $x<a+1$, to $2x<a+x+1$, a zatem

$$(2^{a+x})^2<2^{2a+2x}+2^{2x}+1<2^{2a+2x}+2\cdot 2^{a+x}+1=(2^{a+x}+1)^2,$$

czyli $2^{a+x}<y<2^{a+x}+1$. Jednak liczba całkowita y nie może znajdować się pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $x\geqslant a+1$. Stąd w szczególności $x\geqslant 2$.

Z równości $1+2^{2x}+2^{2a+2x}=y^2$ wynika, że

$$2^{2x}+2^{2a+2x}=y^2-1, \quad \text{czyli} \quad 2^{2x}(2^{2a}+1)=(y-1)(y+1).$$

Liczby $y-1$ oraz $y+1$ są tej samej parzystości, więc skoro ich iloczyn jest liczbą parzystą, to obie muszą być parzyste. Ponieważ te liczby różnią się o 2, więc ich największy wspólny dzielnik musi być równy 2. Stąd wniosek, że jedna z liczb $y-1$, $y+1$ jest postaci $2^{2x-1}k$, a druga — postaci $2l$, gdzie

k, l to nieparzyste liczby względnie pierwsze o iloczynie równym $2^{2a}+1$.

Możliwe są dwa przypadki:

1° $y-1=2^{2x-1}k$ oraz $y+1=2l$. Wówczas, skoro $k\geqslant 1$, to

$$2^{2a+2x}+2^{2x}+1=y^2=(2^{2x-1}k+1)^2=2^{4x-2}k^2+2^{2x}k+1\geqslant 2^{4x-2}+2^{2x}+1.$$

Stąd $2a+2x\geqslant 4x-2$, czyli $x\leqslant a+1$. Ale wcześniej wykazaliśmy, że $x\geqslant a+1$, więc musi zachodzić równość $x=a+1$. Wówczas $b=a+x=2a+1$ i otrzymujemy pary opisane w rozwiązaniu właściwego zadania.

2° $y-1=2l$ oraz $y+1=2^{2x-1}k$. Podobnie jak w poprzednim przypadku otrzymujemy

$$2^{2a+2x}+2^{2x}+1=y^2=(2^{2x-1}k-1)^2=2^{4x-2}k^2-2^{2x}k+1$$

lub równoważnie $2^{2a}+1=2^{2x-2}k^2-k$. Liczba k jest nieparzysta, więc $k=1$ lub $k>2$. Jeżeli $k=1$, to

$$2^{2a}+1=2^{2x-2}-1, \quad \text{czyli} \quad 2^{2a-1}+1=2^{2x-3}.$$

Jednak lewa strona ostatniej równości jest nieparzysta, a prawa — parzysta. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $k>2$. Wówczas, korzystając z nierówności $2^{2x}-2\geqslant 2^{2x-2}+1$, otrzymujemy

$$2^{2a}+1=k(2^{2x-2}k-1)>2^{2x}-2\geqslant 2^{2x-2}+1,$$

skąd $2a>2x-2$, czyli $x<a+1$. Stoi to w sprzeczności z wcześniejszym rezultatem $x\geqslant a+1$. W tym przypadku nie ma więc rozwiązań.

Bezpośrednio sprawdzamy, że pary $(a,b)=(a,2a+1)$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą, spełniają zadane równanie. Na mocy przeprowadzonego powyżej rozumowania, są to jedyne pary o tej własności.

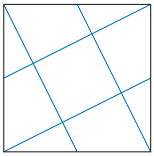
Zadanie 25. Powierzchnię sześcianu należy szczelnie okleić trzema jednakowymi, wyciętymi z papieru, figurami środkowosymetrycznymi. Czy można to uczynić w taki sposób, aby każda figura pokrywała środki pewnych dwóch przeciwległych ścian sześcianu? Odpowiedź uzasadnij.

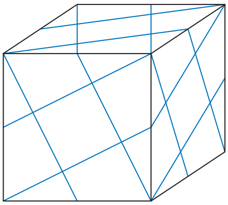
Uwaga. Figury nie mogą na siebie nachodzić. Środki ścian powinny być w całości pokryte przez jedną figurę.

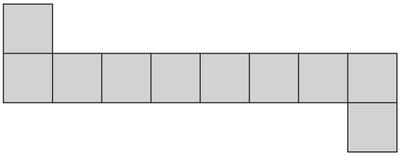
Rozwiązanie

Wskażemy sposób oklejenia sześcianu, który spełnia warunki zadania.

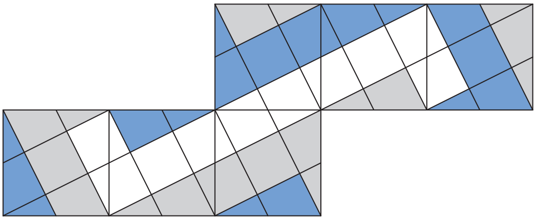
Każdą ścianę sześcianu podzielmy na 9 obszarów, jak pokazano na rysunku 32. Wówczas powierzchnia całego sześcianu zostanie podzielona na 30 jednakowych kwadratów, spośród których niektóre będą zagięte wzdłuż krawędzi sześcianu (rys. 33).

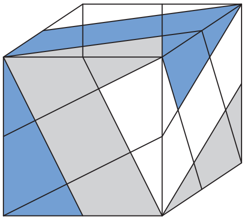

rys. 32


rys. 33


rys. 34

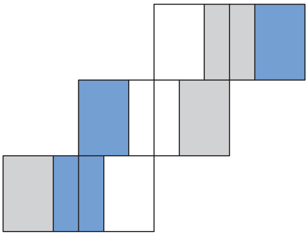
Rozważmy figurę środkowosymetryczną złożoną z 10 kwadratów (rys. 34). Trzema takimi figurami można okleić całą powierzchnię sześcianu tak, aby warunki zadania były spełnione. Opisane oklejenie przedstawione jest na siatce (rys. 35) i rzucie sześcianu (rys. 36).

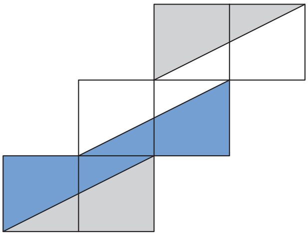

rys. 35

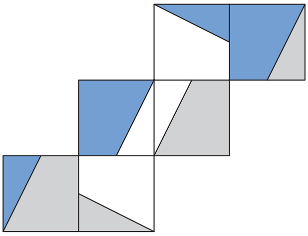

rys. 36

Uwaga

Powyższe zadanie okazało się jednym z najtrudniejszych w całej Lidze. Nadesłano tylko trzy poprawne rozwiązania, które prezentujemy poniżej (na ilustracjach przedstawione są siatki oklejonych sześcianów). Autorami tych rozwiązań są Jan Bednarski (rys. 37), Bogna Pawlus (rys. 38) oraz Wojciech Wawrów (rys. 39).


rys. 37


rys. 38


rys. 39

Zadanie 26. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=2$. Udowodnij, że

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}>ab+bc+ca.$$

Rozwiązanie

Jeżeli zwiększymy mianownik dodatniego ułamka, to jego wartość zmniejszy się. Stosując takie szacowanie do każdego z trzech ułamków obecnych w wyrażeniu po lewej stronie dowodzonej nierówności, uzyskujemy

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}>\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Wystarczy zatem udowodnić, że zachodzi nierówność $2\geqslant ab+bc+ca$, czyli — w myśl warunków zadania — $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. Tymczasem ostatnia nierówność jest równoważna prawdziwej nierówności

$$\tfrac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)\geqslant 0,$$

co kończy dowód.

Uwaga 1.

Można uzasadnić, na przykład korzystając z *nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną* trzech liczb, że

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geqslant 3.$$

Ponadto, jak wykazaliśmy wcześniej, $2\geqslant ab+bc+ca$. Stąd wniosek, że różnica między lewą i prawą stroną danej nierówności jest nie tylko dodatnia, ale wynosi zawsze co najmniej 1.

Uwaga 2.

To zadanie jest jedynym zadaniem Ligi, które nie pochodzi od Komitetu Głównego OMG. Zadanie zaproponował pan Jan Tułowiecki.

Zadanie 27. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Wykaż, że suma pól trójkątów ABE i ADF jest równa polu trójkąta CEF.

Rozwiązanie

Sposób I

Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczali pole figury $\mathcal{F}$.

Niech punkty K, L, M będą środkami odpowiednio odcinków AD, AF, BC (rys. 40). Odcinek EL jest wówczas wysokością w trójkącie równobocznym AEF.

Wykażemy najpierw, że $[DKLF]=[ELM]$. Rzeczywiście, ponieważ

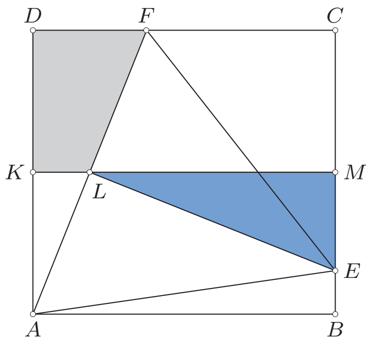
$$\sphericalangle FAD=90^\circ-\sphericalangle BAF=90^\circ-\sphericalangle MLF=\sphericalangle ELM,$$

więc trójkąty prostokątne FAD i ELM są podobne (cecha kąt–kąt). Stąd wniosek, że

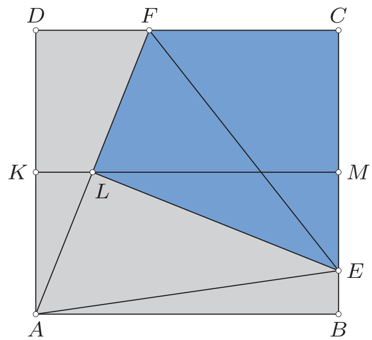
$$\frac{[ELM]}{[FAD]}=\left(\frac{EL}{AF}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

czyli $[ELM]=\frac{3}{4}[FAD]$. Ponadto pole trójkąta LAK stanowi $\frac{1}{4}$ pola trójkąta FAD, więc

$$[DKLF]=[FAD]-[LAK]=[FAD]-\tfrac{1}{4}[FAD]=\tfrac{3}{4}[FAD]=[ELM].$$



rys. 40



rys. 41

Prostokąty $ABMK$ i $KMCD$ są przystające, więc $[ABMK]=[KMCD]$. Stąd oraz z równości $[DKLF]=[ELM]$ otrzymujemy (rys. 41)

$$\begin{aligned}[ABELFD]&=[ABMK]+[DKLF]-[ELM]=[ABMK]=\\&=[KMCD]=[KMCD]+[ELM]-[DKLF]=[LECF].\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że $[AEL]=[LEF]$, skąd

$$[ABE]+[ADF]=[ABELFD]-[AEL]=[LECF]-[LEF]=[CEF],$$

co było do udowodnienia.

Sposób II

Przedstawimy rozwiązanie, którego autorem jest pan Tomasz Cieśla. Trójkąty ABE, ADF podzielimy na części, z których następnie ułożymy trójkąt CEF.

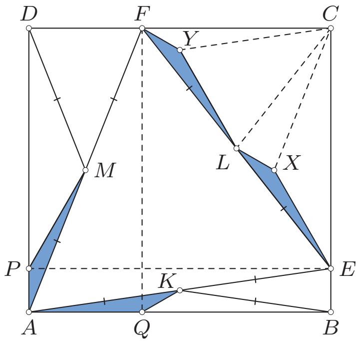
Niech punkty K, L, M będą środkami odpowiednio odcinków AE, EF, FA oraz niech P i Q będą takimi punktami, że czworokąty $ABEP$ i $ADFQ$ są prostokątami (rys. 42).

Z równości kątów $\sphericalangle ADF=\sphericalangle AKF=\sphericalangle AQF=90^\circ$ wynika, że punkty D, K, Q leżą na okręgu o średnicy AF. Stąd w szczególności

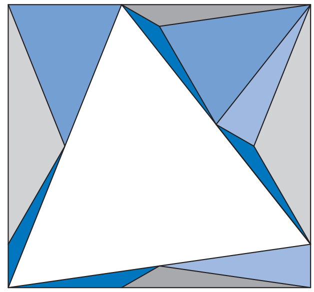
$$\sphericalangle PAM=\sphericalangle DAF=\sphericalangle QFA=\sphericalangle QKA.$$

Analogicznie, ponieważ punkty B, M, P leżą na okręgu o średnicy AE, więc $\sphericalangle QAK=\sphericalangle PMA$. Otrzymane dwie równości kątów wraz z $AK=MA$

oznaczają, że trójkąty AKQ i MAP są przystające (cecha kąt–bok–kąt). W takim razie $\sphericalangle QAK + \sphericalangle QKA = \sphericalangle QAK + \sphericalangle PAM = 90° - 60° = 30°$, więc $\sphericalangle AQK = \sphericalangle MPA = 180° - 30° = 150°$.



rys. 42



rys. 43

Oznaczmy przez X, Y takie punkty znajdujące się na zewnątrz trójkąta AEF, że trójkąty ELX i LFY są przystające do trójkątów AKQ i MAP. Z równości

$$\sphericalangle XEL = \sphericalangle QAK = 90° - \sphericalangle AEB = 90° - (120° - \sphericalangle CEL) = \sphericalangle CEL - 30°$$

wynika, że $\sphericalangle CEX = 30° = \sphericalangle DPM$. Ponadto $EX = PM$, $EC = PD$, co oznacza, że trójkąty CEX i DPM są przystające (cecha bok–kąt–bok).

Analogicznie dochodzimy do wniosku, że trójkąty CFY i BQK są przystające.

W końcu korzystając z cechy bok–bok–bok, stwierdzamy, że KBE i CLX oraz MDF i CLY to pary trójkątów przystających.

Skoro trójkąty przystające mają równe pola, to korzystając ze wszystkich otrzymanych przystawań trójkątów, otrzymujemy tezę zadania (rys. 43).

Zadanie 28. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, że dowolne dwie z nich mają największy wspólny dzielnik większy od 1, a dowolne trzy z nich mają największy wspólny dzielnik równy 1? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Takie liczby istnieją. Na przykład:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11, \quad 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13, \quad 715 = 5 \cdot 11 \cdot 13.$$

Dowolne dwie z tych liczb mają wspólny dzielnik pierwszy, a więc dzielnik większy od 1. Z drugiej strony żadna liczba pierwsza nie występuje w rozkładzie więcej niż dwóch liczb, więc dowolne trzy z tych liczb mają największy wspólny dzielnik równy 1.

Uwaga

Jeden z uczestników Ligi, Wojciech Wawrów, sformułował i udowodnił następujący fakt, będący uogólnieniem zadania.

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami naturalnymi, spełniającymi nierówności $a<b\leqslant c$. Wówczas istnieje zbiór c liczb naturalnych, spośród których każde a liczb ma wspólny dzielnik większy od 1, ale żadne b liczb nie ma takiego dzielnika.

Podamy najpierw konstrukcję odpowiedniego zbioru c liczb. Niech n będzie liczbą różnych a-elementowych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,c\}$, a S_1, S_2, …, S_n będą tymi podzbiorami w pewnej kolejności. Ustalmy ciąg dowolnych n różnych liczb pierwszych p_1, p_2, …, p_n. Szukany zbiór c liczb naturalnych $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_c\}$ będziemy konstruowali w następujący sposób: dla każdej liczby naturalnej i, takiej że $1\leqslant i\leqslant n$, x_k jest liczbą podzielną przez p_i wtedy i tylko wtedy, gdy $k\in S_i$. Ponadto przyjmijmy, że liczby x_1, x_2, …, x_c mają dzielniki pierwsze tylko pośród liczb p_1, p_2, …, p_n.

Udowodnimy, że tak skonstruowany zbiór X spełnia zadane warunki. Niech $A=\{x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_a}\}$ będzie dowolnym a-elementowym podzbiorem zbioru X. Wówczas istnieje taka liczba naturalna i, że $S_i=\{k_1,k_2,\ldots,k_a\}$. Stąd wynika, że wszystkie elementy zbioru A mają wspólny dzielnik p_i.

Niech z kolei $B=\{x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_b}\}$ będzie dowolnym b-elementowym podzbiorem zbioru X. Zauważmy, że każda liczba pierwsza spośród p_1, p_2, …, p_n jest dzielnikiem dokładnie a liczb ze zbioru X oraz liczby ze zbioru X nie mają innych dzielników pierwszych. W takim razie, skoro $a<b$, to nie może istnieć liczba pierwsza, która dzieli wszystkie b liczb należących do zbioru B. Liczby te nie mogą mieć zatem żadnego wspólnego dzielnika pierwszego, a tym bardziej żadnego wspólnego dzielnika większego od 1.

Zadanie 29. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczba $n+2^k$ ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że szukaną najmniejszą liczbą jest **10**.

Najpierw uzasadniamy, że jeżeli $1\leqslant n\leqslant 9$, to istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $n+2^k$ ma tylko jeden dzielnik pierwszy. Odpowiednie przykłady zebrane są w poniższej tabeli.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	1	1	1	2	1	1	1	3	1
$n+2^k$	3	2^2	5	2^3	7	2^3	3^2	2^4	11

Pozostaje udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k liczba

$$10+2^k=2(5+2^{k-1})$$

ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze. Jednym z dzielników tej liczby jest 2 więc równoważnie wystarczy wykazać, że liczba $5+2^{k-1}$ posiada nieparzysty dzielnik pierwszy. Jeśli $k=1$, to liczba $5+2^{k-1}=6$ ma nieparzysty dzielnik pierwszy 3. Jeśli $k \geqslant 2$, to liczba $5+2^{k-1}$ jest nieparzysta i większa od 1, więc również posiada nieparzysty dzielnik pierwszy.

Zadanie 30. Każdy punkt sfery pomalowano jednym z dwóch kolorów w taki sposób, że dowolny okrąg wielki tej sfery zawiera punkty obydwu kolorów. Czy stąd wynika, że pewna średnica sfery ma końce różnych kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

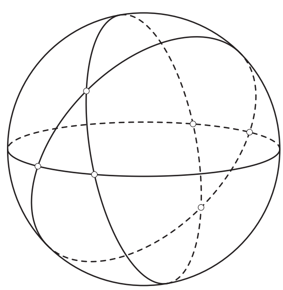
Uwaga. Okręgiem wielkim nazywamy każdy okrąg narysowany na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery.

Rozwiązanie

Wykażemy, że nie musi istnieć średnica sfery o końcach różnych kolorów.

Sposób I

Zauważmy, że każde dwa różne okręgi wielkie tej samej sfery przecinają się w punktach, będących końcami wspólnej średnicy tych dwóch okręgów. Wybierzmy dowolne trzy okręgi wielkie, które nie mają wspólnej średnicy. Na czarno pomalujmy te punkty sfery, które należą do *dokładnie* jednego z tych trzech okręgów wielkich, a na biało — wszystkie pozostałe punkty (rys. 44). Wówczas każda średnica sfery ma końce tego samego koloru, gdyż opisane kolorowanie punktów sfery jest symetryczne względem jej środka.



rys. 44

Każdy z wybranych trzech okręgów wielkich zawiera punkty obydwu kolorów. Również każdy inny okrąg wielki musi przecinać pewien z wybranych trzech okręgów w punkcie czarnym. To kończy rozwiązanie.

Sposób II

Weźmy pod uwagę dowolną krzywą zamkniętą c narysowaną na sferze, symetryczną względem środka sfery, ale nie będącą jej okręgiem wielkim.

Punkty należące do krzywej c malujemy na czarno, a wszystkie pozostałe punkty sfery na biało.

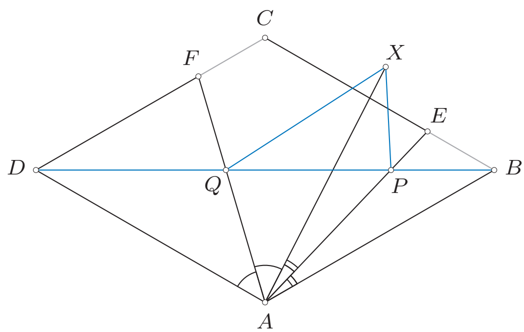
Wówczas każda średnica sfery ma końce tych samych kolorów, a każdy okrąg wielki sfery ma co najmniej dwa punkty wspólne z krzywą c i jest od niej różny — posiada więc punkty obydwu kolorów.

Zadanie 31. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = 120°$. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że $BE = CF$. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że z odcinków o długościach BP, PQ, QD można zbudować trójkąt, którego jeden z kątów ma miarę $60°$.

Rozwiązanie

Rozważmy obrót o $60°$ wokół punktu A, który przeprowadza punkt B na punkt C. Przy tym obrocie punkt E przechodzi na punkt F, skąd wniosek, że $\sphericalangle EAF = 60°$. Wobec tego również $\sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 120° - \sphericalangle EAF = 60°$.

Z równości $\sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = \sphericalangle EAF$ i $AB = AD$ wynika, że wewnątrz kąta EAF istnieje taki punkt X, że $\sphericalangle XAE = \sphericalangle BAE$, $\sphericalangle XAF = \sphericalangle DAF$ oraz $AX = AB = AD$ (rys. 45). Punkt X jest jednocześnie symetryczny do punktu B względem prostej AE oraz do punktu D względem prostej AF.



rys. 45

Udowodnimy, że trójkąt PQX spełnia warunki zadania. Odcinki PB i PX są symetryczne względem prostej AE, więc $PB = PX$. Analogicznie uzasadniamy, że $QD = QX$. Ponadto zachodzi równość

$$\sphericalangle PXQ = \sphericalangle PXA + \sphericalangle QXA = \sphericalangle PBA + \sphericalangle QDA = 180° - \sphericalangle DAB = 60°.$$

Wykazaliśmy, że trójkąt PQX jest zbudowany z odcinków o długościach BP, PQ, QD oraz jeden z jego kątów wewnętrznych ma miarę $60°$, więc rozwiązanie jest zakończone.

Uwaga

Teza zadania zachodzi również gdy pominiemy założenie $\sphericalangle DAB = 120°$. Można to uzasadnić na przykład korzystając z *twierdzenia cosinusów*.

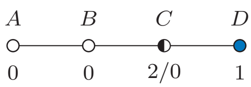
Zadanie 32. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z trzech kolorów. Okazało się, że każdy odcinek ma następującą własność: jeśli końce odcinka mają ten sam kolor, to jego środek jest tego samego koloru co każdy z końców, a jeśli końce odcinka mają różne kolory, to jego środek jest innego koloru niż każdy z końców. Udowodnij, że wszystkie punkty płaszczyzny pomalowano tym samym kolorem.

Rozwiązanie

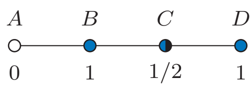
Oznaczmy kolory przez 0, 1, 2. Przypuśćmy nie wprost, że na płaszczyźnie istnieją punkty A i D, które nie są tego samego koloru. Bez straty ogólności przyjmijmy, że A ma kolor 0, a D ma kolor 1.

Niech B i C będą punktami, które dzielą odcinek AD na trzy równe części AB, BC, CD.

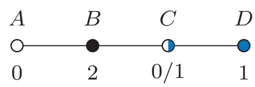
Jeżeli punkt B ma kolor 0, to z jednej strony punkt C musi mieć kolor 2, jako środek odcinka BD. Z drugiej strony punkt C musi mieć kolor 0, gdyż B jest środkiem odcinka AC (rys. 46). Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż punkt C nie może mieć jednocześnie dwóch różnych kolorów.



rys. 46



rys. 47



rys. 48

Analogiczne sprzeczności otrzymujemy w przypadkach, gdy kolorami punktu B są 1 (rys. 47) lub 2 (rys. 48). Stąd wniosek, że wszystkie punkty płaszczyzny pomalowano tym samym kolorem.

Uwaga

Przedstawione rozwiązanie pozwala stwierdzić, że nie tylko całej płaszczyzny, ale nawet prostej lub odcinka nie da się pomalować zgodnie z warunkami zadania przy użyciu więcej niż jednego koloru. Można więc zapytać, czy istnieją zbiory nieskończenie wielu punktów, w których opisane kolorowanie jest możliwe.

Okazuje się, że takie zbiory istnieją. Na prostej (osi liczbowej) rozważmy zbiór *ułamków diadycznych*, czyli liczb postaci $\frac{n}{2^k}$, gdzie n i k to liczby całkowite oraz $k \geqslant 0$. Jeżeli kolory nazwiemy 0, 1, 2, to liczbę $\frac{n}{2^k}$ malujemy kolorem będącym resztą z dzielenia liczby $n \cdot 2^k$ przez 3.

Zachęcamy Czytelnika do wykazania, że przy opisanym kolorowaniu każdemu ułamkowi diadycznemu kolor jest przypisany jednoznacznie (niezależnie od jego przedstawienia w postaci $\frac{n}{2^k}$) oraz, że dla dowolnych dwóch ułamków diadycznych a, b prawdziwa jest własność: wśród liczb a, b, $\frac{a+b}{2}$ albo wszystkie mają ten sam kolor, albo każda jest innego koloru.

Powyższe własności to tak naprawdę opisane w zadaniu warunki kolorowania, przy czym *środek odcinka* łączącego liczby a, b rozumiemy jako środek odcinka łączącego a i b na osi liczbowej, czyli ich średnią arytmetyczną.

Zadanie 33. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $a^3+b^3+1=3ab$. Znajdź wszystkie wartości, które może przyjmować suma $a+b$.

Rozwiązanie

Równość $a^3+b^3+1=3ab$ przekształcamy równoważnie, uzyskując kolejno

$$\begin{aligned} a^3+b^3+3ab(a+b)+1 &= 3ab+3ab(a+b),\\ (a+b)^3+1 &= 3ab(a+b+1),\\ (a+b+1)((a+b)^2-(a+b)+1) &= 3ab(a+b+1),\\ (a+b+1)(a^2-ab+b^2-a-b+1) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że $a+b+1=0$, czyli $a+b=-1$ lub zachodzi równość

$$a^2-ab+b^2-a-b+1=0, \quad \text{czyli} \quad \tfrac{1}{2}((a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2)=0.$$

Ostatni związek oznacza, że $a=b=1$, skąd $a+b=2$. Ostatecznie otrzymujemy dwie możliwe wartości sumy $a+b$: są to liczby $\mathbf{-1}$ oraz $\mathbf{2}$. Pierwsza z tych wartości jest osiągana na przykład dla pary $(a,b)=(0,-1)$, druga natomiast dla $(a,b)=(1,1)$.

Uwaga

Można sprawdzić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c równości

$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \text{oraz} \quad \tfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)=0$$

są równoważne i zachodzą, gdy $a+b+c=0$ lub $a=b=c$. Fakt ten można wykorzystać w rozwiązaniu zadania. Podstawienie $c=1$ pozwala zauważyć, że dana w treści zadania równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+1=0$ lub $a=b=1$.

Zadanie 34. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że przy dzieleniu przez $a+b+1$ liczby a^2 i b^2 dają odpowiednio reszty c i d, a przy dzieleniu przez $c+d+1$ liczby c^2 i d^2 dają odpowiednio reszty a i b. Udowodnij, że $|a-d|=|b-c|$.

Rozwiązanie

Z treści zadania wnosimy, że liczby całkowite a^2-c i b^2-d są podzielne przez $a+b+1$. Wobec tego również liczba

$$(a+b+1)(a-b)-(a^2-c)+(b^2-d)=a^2-b^2+a-b-a^2+c+b^2-d=a-b+c-d$$

jest podzielna przez $a+b+1$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że liczba $a-b+c-d$ jest podzielna przez $c+d+1$.

Jeżeli $a-b+c-d=0$, to teza zadania zachodzi. Załóżmy, że $a-b+c-d>0$ (w przypadku $a-b+c-d<0$ dalsza część rozwiązania przebiega analogicznie). Udowodnimy, że wówczas $a+b=c+d$.

Przypuśćmy nie wprost, że $a+b\neq c+d$ oraz bez straty ogólności załóżmy, że $a+b<c+d$. Liczba dodatnia $a-b+c-d$ jest podzielna przez różne liczby $a+b+1$ oraz $c+d+1$, więc jest co najmniej dwukrotnie większa od mniejszej z tych liczb. Stąd otrzymujemy

$$a-b+c-d\geqslant 2(a+b+1),\quad \text{czyli}\quad c\geqslant a+3b+d+2.$$

Jednak, w myśl warunków zadania, zachodzi nierówność $c<a+b+1$, gdyż reszta z dzielenia musi być mniejsza od dzielnika. Stąd uzyskujemy

$$a+b+1>c\geqslant a+3b+d+2,\quad \text{czyli}\quad 0>2b+d+1.$$

Doszliśmy do sprzeczności, gdyż liczba $2b+d+1$ jest dodatnia. Analogiczną sprzeczność otrzymujemy przy założeniu $a+b>c+d$.

Tym samym udowodniliśmy, że liczby a, b, c, d muszą spełniać co najmniej jedną z równości $a+c=b+d$ lub $a+b=c+d$. To zaś oznacza, że liczby te są powiązane zależnością $|a-d|=|b-c|$, co kończy rozwiązanie zadania.

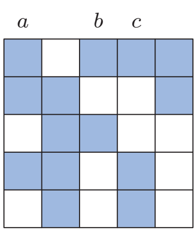
Uwaga

Przykładowe czwórki (a,b,c,d) spełniające warunki zadania to $(2,11,4,9)$ oraz $(9,11,18,16)$. Dla pierwszej z nich zachodzi równość $a+b=c+d$, a dla drugiej — równość $a+c=b+d$. Widać więc, że tezy zadania nie można ograniczyć tylko do jednego z tych dwóch przypadków.

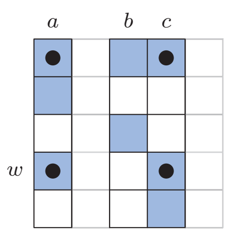
Zadanie 35. Każde pole tablicy o wymiarach 5×5 pomalowano albo na czarno, albo na biało. Wykaż, że można tak wybrać dwa wiersze i dwie kolumny tej tablicy, aby cztery pola na ich przecięciach były tego samego koloru.

Rozwiązanie

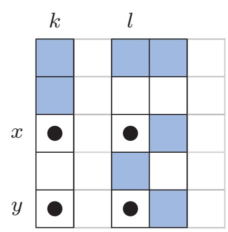
Weźmy pod uwagę pierwszy wiersz tablicy. Zawiera on co najmniej trzy pola tego samego koloru, powiedzmy czarnego. Dalsze rozważania ograniczymy do trzech kolumn zawierających czarne pola pierwszego wiersza (jeśli takich kolumn jest więcej, wybieramy dowolne trzy z nich). Nazwijmy te kolumny a, b, c (rys. 49).



rys. 49



rys. 50



rys. 51

Jeżeli pewien z pozostałych czterech wierszy (powiedzmy w) ma czarne pola w dwóch spośród kolumn a, b, c, to cztery pola na przecięciach tych dwóch kolumn, pierwszego wiersza i wiersza w są czarne (rys. 50).

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym każdy z wierszy od drugiego do piątego zawiera co najwyżej jedno czarne pole w obrębie kolumn a, b, c. To oznacza, że każdemu z tych czterech wierszy możemy przypisać parę kolumn (a,b), (a,c) lub (b,c) o tej własności, że dwa pola na przecięciu tych kolumn i rozważanego wiersza są białe (jeżeli wiersz ma białe pola we wszystkich kolumnach, przypisujemy mu dowolną parę).

Są jednak cztery wiersze i tylko trzy możliwe wybory pary kolumn. Stąd wynika, że pewna para kolumn, powiedzmy (k,l), została przypisana co najmniej dwóm wierszom, powiedzmy x, y (rys. 51). To oznacza, że cztery pola na przecięciach kolumn k, l i wierszy x, y są białe.

Uwaga

Parę liczb naturalnych (m,n), w której $m \leqslant n$, nazwiemy *ciekawą*, jeżeli prawdziwa jest następująca własność: w dowolnej tablicy wymiarów $m \times n$, której każde pole jest białe albo czarne, można wybrać takie dwa wiersze i dwie kolumny, że cztery pola na ich przecięciach są tego samego koloru. Jeżeli para (m,n), w której $m \leqslant n$, nie jest ciekawa, nazwiemy ją *nieciekawą*.

Zadanie polegało na udowodnieniu, że para $(5,5)$ jest ciekawa. Naturalnym rozszerzeniem problemu wydaje się więc scharakteryzowanie wszystkich ciekawych par. Opiszemy krótko, jak tego dokonać.

Zauważmy, że jeżeli para (a,b) jest ciekawa, to również każda para (m,n), w której $m \geqslant a$ i $n \geqslant b$, jest ciekawa. Analogicznie jeżeli para (a,b) jest nieciekawa, to także każda para (m,n), w której $m \leqslant a$ i $n \leqslant b$, jest nieciekawa.

Nietrudno spostrzec, że pary $(1,n)$ i $(2,n+1)$ są nieciekawe dla każdej liczby całkowitej dodatniej n. Można udowodnić, że para $(3,7)$ jest ciekawa, a para $(4,6)$ jest nieciekawa. Zachęcamy Czytelnika do przeprowadzenia odpowiednich dowodów.

Wymienione spostrzeżenia pozwalają na sformułowanie następującego wniosku: wszystkie ciekawe pary liczb naturalnych to $(3,7)$, $(4,7)$ oraz takie pary (m,n), w których $n \geqslant m \geqslant 5$.

Zadanie 36. Czy istnieją dwa wielościany wypukłe o różnych objętościach, które mają przystające siatki? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga. Tutaj *siatką* nazywamy wielokąt, który powstaje przez rozcięcie powierzchni wielościanu wzdłuż jego niektórych krawędzi i rozłożenie na płaszczyźnie.

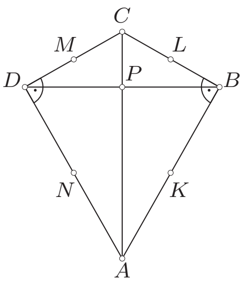
Rozwiązanie

Udowodnimy, że takie dwa wielościany istnieją.

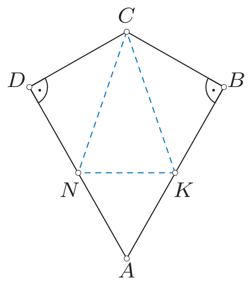
Sposób I

Niech a, b będą różnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Rozważmy deltoid $ABCD$, w którym $AB = AD = a$, $CB = CD = b$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$.

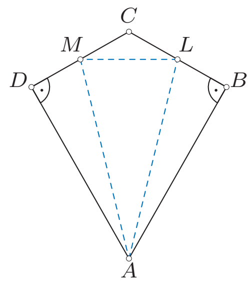
Środki boków AB, BC, CD, DA tego deltoidu oznaczmy odpowiednio przez K, L, M, N, a punkt przecięcia przekątnych — przez P (rys. 52).



rys. 52



rys. 53



rys. 54

Wykażemy, że zaginając omawiany deltoid wzdłuż odcinków KN, CK, CN (rys. 53), otrzymujemy pewien czworościan T_1 o podstawie AKN i wysokości $b = CB = CD$. Rzeczywiście, siatka z rysunku 53 sklei się, gdyż na mocy $\sphericalangle CKN < 90°$ zachodzi nierówność

$$\sphericalangle AKN + \sphericalangle BKC = 180° - \sphericalangle CKN > 90° > \sphericalangle CKN$$

oraz podobnie, skoro $\sphericalangle AKN < 90°$ i $\sphericalangle BKC < 90°$, to

$$\sphericalangle BKC + \sphericalangle CKN > \sphericalangle AKN \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CKN + \sphericalangle AKN > \sphericalangle BKC.$$

Ponadto z równości $\sphericalangle KBC = \sphericalangle NDC = 90°$ wynika, że po sklejeniu siatki, krawędź o długości b będzie prostopadła do ściany AKN.

Analogicznie wykazujemy, że zaginając deltoid $ABCD$ wzdłuż odcinków LM, AL, AM (rys. 54), uzyskujemy czworościan T_2 o podstawie CLM i wysokości $a = AB = AD$.

Pozostaje udowodnić, że otrzymane czworościany mają różne objętości. Zauważmy, że trójkąty prostokątne ABP i BCP są podobne w skali $\frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$. Stąd wniosek, że

$$\frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{a^2}{b^2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Ponadto AKN i ABD oraz CLM i BCD są parami trójkątów podobnych w tej samej skali $\frac{1}{2}$ oraz zachodzą równości $[ABD] = 2[ABP]$, $[BCD] = 2[BCP]$. Łącząc te związki, otrzymujemy

$$\frac{[AKN]}{[CLM]} = \frac{[ABD]}{[BCD]} = \frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Możemy teraz wyznaczyć stosunek objętości V_1, V_2 czworościanów T_1, T_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}[AKN]b}{\frac{1}{3}[CLM]a} = \frac{a^2 b}{b^2 a} = \frac{a}{b}.$$

W myśl założenia $a \neq b$ liczba $\frac{a}{b}$ jest różna od 1, więc czworościany T_1 i T_2 mają różne objętości. Ponadto mają one jednakowe siatki, przystające do deltoidu $ABCD$.

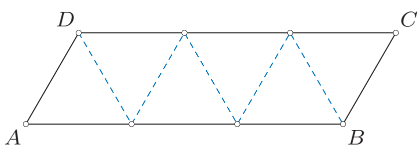
Uwaga 1.

W rozwiązaniu skorzystaliśmy z faktu, że warunkiem wystarczającym do tego, by siatka czworościanu była poprawna, tzn. można było z niej skleić czworościan, jest (oprócz równości długości sklejanych krawędzi) to, aby spełniona była tzw. *nierówność trójkąta dla kąta trójściennego* w co najmniej jednym wierzchołku siatki.

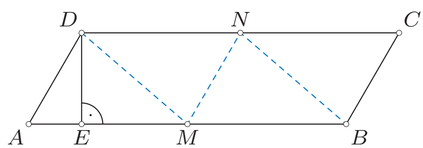
Sposób II

Rozważmy równoległobok $ABCD$, w którym $AD=BC=2$, $AB=CD=6$ oraz $\sphericalangle DAB=60°$.

Zaginając równoległobok wzdłuż pięciu odcinków dzielących go na trójkąty równoboczne (rys. 55), otrzymujemy wielościan wypukły o sześciu ścianach (rys. 57, kolorem oznaczono linie sklejenia siatki). Wielościan ten można podzielić na dwa czworościany foremne o krawędzi 2, więc jego objętość jest równa $2\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 2^3=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.



rys. 55



rys. 56

Oznaczmy przez M i N środki odpowiednio odcinków AB i CD, a przez E — rzut prostokątny punktu D na prostą AB. Wówczas

$$BN=DM=\sqrt{DE^2+EM^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}.$$

Wykażemy, że zaginając równoległobok $ABCD$ wzdłuż odcinków DM, MN, NB (rys. 56), otrzymujemy pewien czworościan.

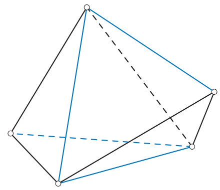
Rozważmy prostopadłościan S o wymiarach $1\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$. Niech T będzie czworościanem wpisanym w ten prostopadłościan w taki sposób, aby każda krawędź czworościanu była przekątną pewnej ściany prostopadłościanu (rys. 58). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, dochodzimy do wniosku, że każda ściana czworościanu T jest trójkątem o bokach długości

$$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2, \quad \sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}=3, \quad \sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}=\sqrt{7}.$$

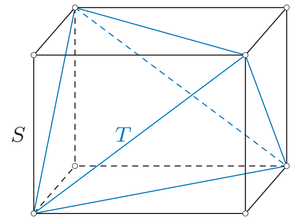
Wobec tego rysunek 56 przedstawia siatkę czworościanu T.

Aby wyznaczyć objętość T, wystarczy od objętości całego prostopadłościanu S odjąć objętości czterech czworościanów narożnych, które wraz z czworościanem T wypełniają całe wnętrze tego prostopadłościanu. Otrzymana objętość będzie równa $abc - 4 \cdot \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}abc = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2}$.

Pozostaje stwierdzić, że $\frac{4}{3}\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$, więc w istocie dwa otrzymane wielościany mają różne objętości.



rys. 57



rys. 58

Uwaga 2.

Można zastanowić się, skąd wiedzieliśmy, jakich wymiarów prostopadłościan S należy rozważyć, aby udowodnić istnienie czworościanu, którego każda ściana jest trójkątem o bokach długości 2, 3, $\sqrt{7}$. Odpowiednie rozumowanie jest następujące.

Przypuśćmy, że czworościan równościenny o krawędziach 2, 3, $\sqrt{7}$ istnieje i jest wpisany (jak na rys. 58) w prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy wówczas układ równań

$$a^2 + b^2 = 2^2, \quad b^2 + c^2 = 3^2, \quad c^2 + a^2 = (\sqrt{7})^2.$$

Stąd $2a^2 = (a^2+b^2)+(c^2+a^2)-(b^2+c^2) = 4+7-9 = 2$, więc $a=1$. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że $b = \sqrt{3}$ i $c = \sqrt{6}$.

Nie jest prawdą, że powyższy układ równań będzie miał rozwiązanie, gdy zamiast liczb 2, 3, $\sqrt{7}$ rozważymy dowolną trójkę x, y, z. Wprawionego Czytelnika zachęcamy do sprawdzenia, że omawiany układ równań ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy liczby x, y, z są długościami boków trójkąta ostrokątnego.

Uwaga 3.

Wykonane w poprzedniej uwadze oraz drugim sposobie rozwiązania rachunki prowadzące do wyznaczenia wymiarów prostopadłościanu S oraz objętości czworościanu T można uogólnić, by uzyskać następujący fakt: objętość czworościanu równościennego, którego każda ściana jest trójkątem o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

W szczególności przyjmując $a = b = c$ otrzymujemy wzór $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ na objętość czworościanu foremnego o krawędzi a, z którego skorzystaliśmy w rozwiązaniu.

Zadanie 37. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są takie, że liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ mają wspólny dzielnik pierwszy. Czy stąd wynika, że liczby $a+b^{16}$, $b+c^{16}$, $c+a^{16}$ również mają wspólny dzielnik pierwszy? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania jest twierdząca. Oznaczmy przez p wspólny dzielnik pierwszy liczb $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$. Rozwiązanie przeprowadzimy dwoma sposobami.

Sposób I

Zauważmy, że skoro p jest dzielnikiem liczb $a+b^2$ i $c+a^2$, to p musi być także dzielnikiem liczby

$$(a+b^2)(b^2-a)+c+a^2=b^4-a^2+c+a^2=b^4+c.$$

Stąd oraz z tego, że p dzieli $b+c^2$, uzyskujemy wniosek, że liczba

$$(b^4+c)(b^4-c)+b+c^2=b^8-c^2+b+c^2=b^8+b$$

jest podzielna przez p. Wreszcie, ponownie korzystając z tego, że p jest dzielnikiem liczby $a+b^2$, otrzymujemy podzielność przez p liczby

$$(b^8+b)(b^8-b)+a+b^2=b^{16}-b^2+a+b^2=a+b^{16}.$$

W analogiczny sposób dochodzimy do wniosku, że liczby $b+c^{16}$ i $c+a^{16}$ są podzielne przez p. Liczba p jest wspólnym dzielnikiem pierwszym trzech danych liczb.

Sposób II

Z treści zadania wynika, że prawdziwe są kongruencje

$$b^2 \equiv -a \pmod{p}, \quad a^2 \equiv -c \pmod{p} \quad c^2 \equiv -b \pmod{p}.$$

Podnosząc powyższe kongruencje stronami odpowiednio do ósmej, czwartej i drugiej potęgi, uzyskujemy

$$b^{16} \equiv a^8 \pmod{p}, \quad a^8 \equiv c^4 \pmod{p}, \quad c^4 \equiv b^2 \pmod{p}.$$

Łącząc powyższe związki i ponownie korzystając z $b^2 \equiv -a \pmod{p}$, otrzymujemy $b^{16} \equiv -a \pmod{p}$, co oznacza, że liczba $a+b^{16}$ dzieli się przez p. Analogicznie uzasadniamy, że liczby $b+c^{16}$ i $c+a^{16}$ są podzielne przez p.

Zadanie 38. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są takie, że liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ mają wspólny dzielnik pierwszy. Czy stąd wynika, że liczby $a-b$, $b-c$, $c-a$ również mają wspólny dzielnik pierwszy? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Rozważmy trójkę $(a,b,c)=(2,27,39)$. Każda z liczb

$$a+b^2=43\cdot 17,\quad b+c^2=43\cdot 36,\quad c+a^2=43$$

ma dzielnik pierwszy 43. Z drugiej strony liczby $a-b=-25$, $b-c=-12$, $c-a=37$ nie mają wspólnego dzielnika pierwszego. W takim razie odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest negatywna.

Uwaga 1.

Aby znaleźć odpowiedni kontrprzykład, można postąpić następująco. Wybieramy liczbę a (najlepiej niewielką) i oznaczamy przez p jeden z dzielników pierwszych liczby a^8+a. Dlaczego akurat tej liczby? Z rozwiązania poprzedniego zadania wiemy, że wspólny dzielnik pierwszy liczb $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ jest także wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb a^8+a, b^8+b, c^8+c. Jeżeli $a=2$, to $a^8+a=2\cdot 3\cdot 43$, więc możemy przyjąć $p=43$.

Zauważmy, że teraz liczby b i c są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do reszty z dzielenia przez 43. Skoro chcemy aby liczba $c+a^2=c+4$ była podzielna przez 43, to c musi dawać resztę 39 przy dzieleniu przez 43, czyli $c=43k+39$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k. Podobnie, skoro liczba

$$\begin{aligned} b+c^2=b+(43(k+1)-4)^2 &= b+43^2(k+1)^2-2\cdot 43(k+1)\cdot 4+4^2= \\ &= b+43(43(k+1)^2-8(k+1))+16 \end{aligned}$$

ma być podzielna przez 43, to b musi dawać resztę 27 przy dzieleniu przez 43, czyli $b=43l+27$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej l.

Pozostaje wybrać liczby k, l w taki sposób, aby liczby $a-b$, $b-c$, $c-a$ nie miały wspólnego dzielnika pierwszego. Dla $k=l=0$ uzyskujemy trójkę (a,b,c) podaną w rozwiązaniu.

Uwaga 2.

Korzystając z bardziej zaawansowanych technik teorioliczbowych można wykazać, że jeżeli liczby $a-b$, $b-c$, $c-a$ nie mają wspólnego dzielnika pierwszego oraz liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$ mają wspólny dzielnik pierwszy p, to liczba $p-1$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 39. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Symetralna odcinka CM przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $AK^2+BL^2=KL^2$.

Rozwiązanie

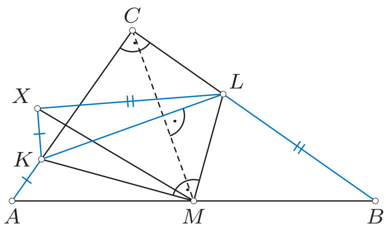
Bez straty ogólności załóżmy, że $AC\leqslant BC$. Wówczas punkt L leży na odcinku BC, a punkt K leży na odcinku AC (rys. 59, w szczególności punkt K może pokrywać się z punktem A) albo należy do przedłużenia tego odcinka (rys. 60). Zauważmy, że $\sphericalangle KML=\sphericalangle KCL=90^\circ$. Dalsze rozumowanie przeprowadzimy na kilka sposobów.

Sposób I

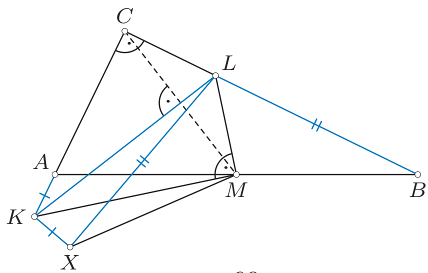
Niech X będzie punktem symetrycznym do A względem prostej MK. Wówczas

$$\sphericalangle XML = 90^\circ - \sphericalangle KMX = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle KMA = \sphericalangle BML,$$

skąd i z $BM = XM$ wynika, że punkt X jest symetryczny do punktu B względem prostej ML. Odnotujmy, że punkty X i K leżą po tej samej stronie prostej ML.



rys. 59



rys. 60

Jeżeli punkt K należy do odcinka AC (rys. 59), to punkty X i L leżą po tej samej stronie prostej MK. Wówczas

$$\sphericalangle KXL = \sphericalangle KXM + \sphericalangle LXM = \sphericalangle KAM + \sphericalangle LBM = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

Z kolei jeżeli punkt K leży na przedłużeniu odcinka AC (rys. 60), to punkty X i L leżą po przeciwnych stronach prostej MK. Wówczas

$$\sphericalangle KXL = \sphericalangle KXM - \sphericalangle LXM = \sphericalangle KAM - \sphericalangle LBM = \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

W obu przypadkach trójkąt KXL jest prostokątny. Stosując twierdzenie Pitagorasa oraz korzystając z równości $XK = AK$, $XL = BL$, otrzymujemy $KL^2 = XK^2 + XL^2 = AK^2 + BL^2$, czyli tezę zadania.

Sposób II

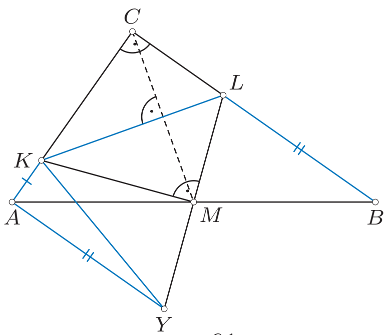
Niech Y będzie punktem symetrycznym do punktu L względem prostej MK (rys. 61). Wówczas $KL = KY$ oraz punkt M jest środkiem odcinka LY. Ponadto M jest środkiem odcinka AB, więc czworokąt $ALBY$ jest równoległobokiem, skąd $AY = BL$ oraz $AC \perp AY$. Wobec tego, niezależnie od tego czy punkt K należy do odcinka AC, czy leży poza tym odcinkiem, trójkąt AKY jest prostokątny. Stosując twierdzenie Pitagorasa do tego trójkąta oraz korzystając z równości $KL = KY$, $AY = BL$, otrzymujemy $KL^2 = KY^2 = AK^2 + AY^2 = AK^2 + BL^2$.

Sposób III

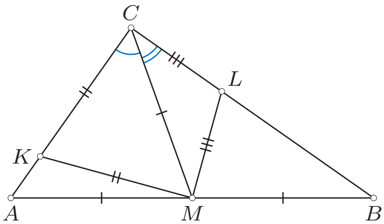
Z równości $AM = CM$ oraz $KC = KM$ wynika, że trójkąty ACM i CMK są równoramienne. Ponadto trójkąty te mają wspólny kąt między podstawą a ramieniem $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MCK$ (rys. 62), więc są podobne. W takim razie

$$\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{KC}, \quad \text{skąd} \quad AC \cdot KC = CM^2.$$

Analogicznie dochodzimy do wniosku, że $BC \cdot LC = CM^2$.



rys. 61



rys. 62

Zauważmy, że $AK = AC - KC$ gdy punkt K należy do odcinka AC oraz $AK = KC - AC$ gdy punkt K nie należy do tego odcinka. W obu przypadkach $AK = |AC - KC|$, skąd $AK^2 = (AC - KC)^2$. Analogicznie $BL^2 = (BC - LC)^2$. Dodając stronami te dwie równości, a następnie korzystając z zależności uzyskanych w poprzednim akapicie oraz twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABC i KLC, otrzymujemy

$$\begin{aligned} AK^2 + BL^2 &= (AC - KC)^2 + (BC - LC)^2 = \\ &= AC^2 - 2 \cdot AC \cdot KC + KC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot LC + LC^2 = \\ &= (AC^2 + BC^2) + (KC^2 + LC^2) - 4CM^2 = \\ &= AB^2 + KL^2 - 4CM^2. \end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że $AB = 2CM$, skąd $AB^2 - 4CM^2 = 0$, więc powyższa równość przybiera postać $AK^2 + BL^2 = KL^2$.

Zadanie 40. Niech S będzie dowolnym zbiorem $2n$ pól szachownicy $n \times n$, dla którego spełnione są warunki:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się dokładnie 2 pola należące do S,
- ruchami wieży szachowej można obejść wszystkie pola zbioru S, stając tylko na polach zbioru S, na każdym dokładnie raz.

Wykaż, że można pomalować pola szachownicy przy użyciu n kolorów w taki sposób, że:

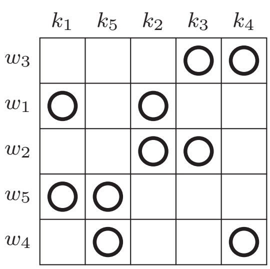
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie 1 pole każdego koloru,
- zbiór S zawiera dokładnie 2 pola każdego koloru.

Rozwiązanie

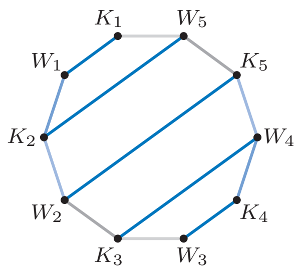
Z założeń zadania wnosimy, że wieża, odwiedzając wszystkie pola zbioru S, musi na zmianę przemieszczać się w obrębie wiersza i w obrębie kolumny. Wobec tego możemy oznaczyć kolumny i wiersze szachownicy odpowiednio przez k_1, k_2, …, k_n oraz w_1, w_2, …, w_n w taki sposób, że ruchami wieży szachowej można odwiedzić kolejno pola

$$(k_1, w_1), \quad (k_2, w_1), \quad (k_2, w_2), \quad \ldots, \quad (k_n, w_n), \quad (k_1, w_n),$$

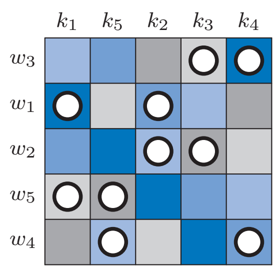
przy czym (k, w) oznacza pole położone na przecięciu kolumny k i wiersza w (rys. 63). Pole (k_1, w_1) możemy wybrać dowolnie spośród pól zbioru S. Rozwiązanie dokończymy trzema sposobami.



rys. 63



rys. 64



rys. 65

Sposób I

Rozważmy $2n$-kąt foremny $K_1W_1K_2W_2 \ldots K_nW_n$ i nazwijmy go $\mathcal{W}$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ wierzchołki K_i i W_i wielokąta $\mathcal{W}$ możemy utożsamić odpowiednio z kolumną k_i i wierszem w_i szachownicy. Ponadto dla każdej pary (i, j) takiej, że $1 \leqslant i \leqslant n$ i $1 \leqslant j \leqslant n$, odcinek K_iW_j — czyli bok lub równoległą do pewnego boku przekątną $\mathcal{W}$ — możemy utożsamić z polem (k_i, w_j) szachownicy. Przy takim utożsamieniu zbiór S staje się zbiorem boków $\mathcal{W}$.

Wskażemy takie kolorowanie odcinków K_iW_j przy użyciu n kolorów, że

- każdy wierzchołek $\mathcal{W}$ jest końcem dokładnie jednego odcinka każdego koloru;
- wielokąt $\mathcal{W}$ ma dokładnie 2 boki każdego koloru.

Przenosząc to kolorowanie na pola szachownicy, zgodnie z opisanym wcześniej utożsamieniem, otrzymamy kolorowanie spełniające warunki zadania.

Rozważmy kolory c_1, c_2, …, c_n. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ kolorem c_k pomalujmy odcinek K_kW_k oraz wszystkie odcinki K_iW_j, które są do niego równoległe (rys. 64).

Kolor każdego odcinka K_iW_j będzie określony jednoznacznie, a opisane wcześniej warunki będą spełnione. Teraz wystarczy przenieść otrzymane kolorowanie z powrotem na szachownicę (rys. 65).

Sposób II

Nazwijmy kolory 0, 1, ..., $n-1$ i pole (k_i, w_j) pomalujmy kolorem, który jest resztą z dzielenia liczby $i+j$ przez n (rys. 66, pola z kolorową liczbą należą do zbioru S).

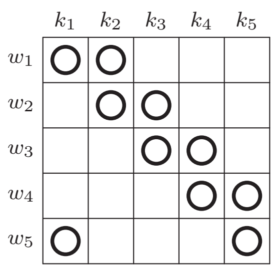
Kolory pól w kolumnie o numerze i to reszty z dzielenia n kolejnych liczb naturalnych $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$ przez n, są to więc parami różne liczby od 0 do $n-1$. Analogicznie uzasadniamy, że każdy wiersz ma pola w n różnych kolorach. Natomiast pola zbioru S mają, w myśl określenia numeracji kolumn i wierszy, kolory będące resztami z dzielenia przez n liczb

$$1+1=2, \quad 1+2=3, \quad 2+2=4, \quad \ldots, \quad n+n=2n, \quad n+1.$$

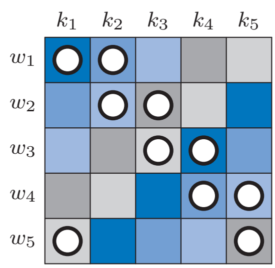
Jak widać, każda z reszt 0, 1, ..., $n-1$ występuje dokładnie dwa razy. Oznacza to, że znalezione kolorowanie spełnia warunki zadania.

	k_1	k_5	k_2	k_3	k_4
w_3	4	3	0	1	2
w_1	2	1	3	4	0
w_2	3	2	4	0	1
w_5	1	0	2	3	4
w_4	0	4	1	2	3

rys. 66



rys. 67



rys. 68

Sposób III

Zmieńmy kolejność kolumn tablicy tak, aby kolejno od lewej do prawej miały one numery k_1, k_2, ..., k_n. Analogicznie, ułóżmy wiersze tak, aby od góry do dołu miały numery w_1, w_2, ..., w_n. Wówczas pola zbioru S znajdą się na pozycjach pokazanych na rysunku 67.

Zauważmy, że jeżeli przed opisanym przemieszczeniem dwa pola znajdowały się w tym samym wierszu/kolumnie, to teraz także znajdują się one w tym samym wierszu/kolumnie. Wystarczy więc znaleźć kolorowanie tablicy spełniające warunki zadania na rysunku 67, a żądane kolorowanie wyjściowej tablicy otrzymamy, przemieszczając kolumny i wiersze z powrotem na swoje miejsca.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli pokolorujemy tablicę tak, jak na rysunku 68, to warunki zadania będą spełnione.

Uwaga

Można zauważyć, że kolorowania przedstawione na rysunkach 65, 66, 68 są takie same. Nie jest to przypadek, gdyż tak naprawdę trzy opisane sposoby to samo rozwiązanie, tylko za każdym razem opowiedziane trochę inaczej.

Errata

$\mathrm{str}^{\text{linia od góry}}_{\text{linia od dołu}}$	jest	powinno być
48_{12}	$(3,7)$, $(4,7)$ oraz takie pary (m,n), w których $n \geqslant m \geqslant 5$.	$(3,t)$, $(4,t)$ dla $t \geqslant 7$ oraz takie pary (m,n), w których $n \geqslant m \geqslant 5$.

Spis treści