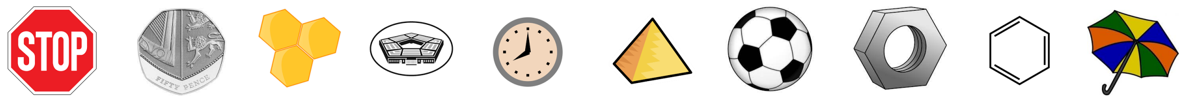
Wielokąty Foremne

Zdalne Seminarium OMJ — 16–17 września 2022 r.



Wielokąty foremne to wyjątkowo symetryczne figury, które można spotkać w wielu okolicznościach. W matematyce olimpijskiej są wdzięcznymi bohaterami zadań z różnych dziedzin — kombinatoryki, geometrii, a nawet teorii liczb. Do rozwiązania tych zadań często wystarczą podstawowe własności oraz intuicja związana właśnie z symetrią.

Wielokąt wypukły o n równych bokach oraz n równych kątach wewnętrznych nazywamy *n-kątem foremnym*. Trójkąt foremny nazywamy *równobocznym*, czworokąt foremny — *kwadratem*.

Równoważnie n-kąt foremny możemy zdefiniować jako n-kąt wypukły, którego wierzchołki dzielą pewien okrąg na n równych łuków. Środek tego okręgu, czyli punkt równo oddalony od wszystkich wierzchołków n-kąta foremnego nazywamy jego *środkiem*.

Rozgrzewka

Zadanie 1.

Jaką miarę w n-kącie foremnym ma kąt
a) środkowy; b) zewnętrzny; c) wewnętrzny?

Zadanie 2.

Ile jest różnych
a) długości; b) kierunków
odcinków łączących wierzchołki w n-kącie foremnym (czyli boków i przekątnych)?

Zadanie 3.

Wykaż, że w n-kącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{n-1}B$ kąty

$$A_1BA_2,\ A_2BA_3,\ \ldots,\ A_{n-2}BA_{n-1}$$

mają równe miary.

Zadanie 4.

W turnieju szachowym bierze udział $2n$ zawodników, chcemy aby każdy zagrał z każdym dokładnie jedną godzinną partię. Mamy n szachownic i $2n-1$ godzin. Jak zaplanować rozgrywki?

Zadanie 5.

Czy istnieje liczba parzysta n o tej własności, że pewna łamana zamknięta o wierzchołkach we wszystkich wierzchołkach n-kąta foremnego ma każdy odcinek w innym kierunku?

Ćwiczenia

Zadanie 6.

Ile jest takich n, że n-kąt foremny ma całkowity kąt wewnętrzny?

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie takie n, że n-kąt foremny o boku 1 można rozciąć na (co najmniej dwa) inne wielokąty foremne o boku 1.

Zadanie 8.

W n-kącie foremnym $A_1A_2\ldots A_n$ zachodzą równości $A_1A_2 = 1$ oraz $A_1A_3 = d$. Wykaż, że $A_1A_4 = d^2 - 1$.

Zadanie 9.

Wykaż, że przekątne A_1A_6, A_2A_9, A_4A_{12} w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 10 (7/I/II OMG).

Spośród wszystkich wierzchołków 17-kąta foremnego wybrano dziesięć. Wykaż, że wśród wybranych punktów są cztery będące wierzchołkami trapezu.

Zadania olimpijskie

Poniżej znajduje się wybór zadań pochodzących z zawodów OMJ oraz inicjatyw towarzyszących. Rozwiązania wszystkich zadań są dostępne na stronie internetowej Olimpiady.

Szkice rozwiązań zadań pochodzących z zawodów OMJ (lub OMG) są dostępne na stronie internetowej `omj.edu.pl/zadania`, a zadań pochodzących z zawodów CPSJ — pod adresem `omj.edu.pl/cpsj`. Materiały z Obozów Naukowych OMJ można znaleźć na stronie: `omj.edu.pl/oboz`.

Zadanie 2/III/VI OMG.

Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

Zadanie 4/III/IX OMG.

Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano 51 punktów. Wykaż, że wśród wybranych punktów istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Zadanie 5/III/X OMG.

Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5/II/XI OMG.

Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano pewne 50 i pokolorowano je na biało. Pozostałe wierzchołki pokolorowano na czerwono. Udowodnij, że wierzchołki tego 100-kąta można tak podzielić na 25 grup po 4 punkty, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami prostokąta o dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach.

Zadanie 7/I/XVI OMJ.

Poniższą figurę, złożoną z czterech pięciokątów foremnych o boku długości 1, sklejono w przestrzeni w następujący sposób. Najpierw zagięto ją wzdłuż odcinków przerywanych, łącząc pogrubione odcinki, a następnie uformowano w taki sposób, aby kolorowe odcinki utworzyły kwadrat. Wyznacz długość powstałego w ten sposób odcinka AB.

Zadanie 5/Zawody Indywidualne/IX CPSJ.

Dany jest siedmiokąt foremny $ABCDEFG$. Proste AB i CE przecinają się w punkcie P. Wyznacz miarę kąta PDG.

Zadanie 5/Zawody Drużynowe/X CPSJ.

Dany jest dziewięciokąt foremny $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ o boku długości 1. Przekątne A_3A_7 i A_4A_8 przecinają się w punkcie P. Wyznacz długość odcinka PA_1.

Zadanie 4/Zawody Indywidualne/I CPSJ.

Udowodnij, że wśród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 9/Obóz Naukowy OMJ 2021 (poziom OMJ).

Dany jest dziesięciokąt foremny $ABCDEFGHIJ$. Wykaż, że $AB + \frac{1}{2}AF = AD$.

Zadanie 5/Obóz Naukowy OMJ 2021 (poziom OM).

Pięciokąt foremny $ABCDE$ oraz trójkąt równoboczny KLM są ułożone w taki sposób, że punkty C i D leżą na odcinku LM, punkt B leży na odcinku KL, a punkt E leży na odcinku KM. Wyznacz miarę kąta CKD.