I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody indywidualne (21 maja 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty K, L, M są symetryczne do punktu P odpowiednio względem środków boków BC, CA, AB. Wykaż, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez Q środek odcinka AK. Wykażemy, że proste AK, BL, CM przecinają się w punkcie Q.

Zauważmy, że czworokąty $APCL$ i $BKCP$ są równoległobokami, gdyż środki ich przekątnych pokrywają się. Wobec tego odcinki AL i BK są równe i równoległe, czyli czworokąt $ABKL$ jest równoległobokiem. Punkt Q jest więc punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Stąd wynika, że punkty B, Q, L leżą na jednej prostej. Podobnie wykazujemy, że punkty C, Q, M leżą na jednej prostej, co kończy rozwiązanie zadania.

---

2. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb pierwszych, dla których spełniona jest równość $a^2+ab+b^2=c^2+3$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że co najmniej jedna z liczb a, b, c musi być parzysta. W przeciwnym razie lewa strona danej równości byłaby nieparzysta, a prawa – parzysta.

Przypuśćmy, że liczba c jest parzysta, czyli $c=2$. Wówczas $a^2+ab+b^2=7$. Równanie to nie ma rozwiązań w liczbach pierwszych, gdyż jego lewa strona jest równa co najmniej 12. Liczba c musi być zatem nieparzysta.

Wobec tego $a=2$ lub $b=2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a=2$. Wówczas $b(2+b)=c^2-1$. Prawa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, skąd wynika, że b jest liczbą parzystą, czyli $b=2$. Stąd otrzymujemy $c=3$.

Jedyną trójką (a,b,c) liczb pierwszych, spełniającą zadaną równość, jest $(2,2,3)$.

---

3. Różne punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku w punkcie O w taki sposób, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = 60^\circ\,.$$

Punkt P leży na krótszym łuku BC tego okręgu. Punkty K, L, M są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AO, BO, CO. Wykaż, że

(a) trójkąt KLM jest równoboczny,

(b) pole trójkąta KLM nie zależy od wyboru punktu P na krótszym łuku BC.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt K leży na odcinku AO.

(a) Ponieważ $\sphericalangle PKO = \sphericalangle PLO = \sphericalangle PMO = 90^\circ$, to punkty K, L i M leżą na okręgu o średnicy OP. Stąd $\sphericalangle LMK = \sphericalangle LOK = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle LKM = \sphericalangle LOM = 60^\circ$, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Wobec tego trójkąt KLM jest równoboczny.

(b) Trójkąt KLM jest trójkątem równobocznym wpisanym w okrąg o średnicy OP, której długość nie zależy od wyboru punktu P na krótszym łuku BC. Zatem również pole tego trójkąta nie zależy od wyboru punktu P.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Udowodnij, że wśród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że potrafimy tak wybrać 51 wierzchołków 101-kąta foremnego $A_1 \ldots A_{101}$, że żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oznaczmy zbiór wybranych wierzchołków przez V. Zauważmy, że wśród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego istnieją dwa kolejne. Bez straty ogólności możemy założyć, że wierzchołki A_1 i A_2 zostały wybrane.

Ponieważ wierzchołek A_1 należy do zbioru V, to wybrany musi być dokładnie jeden wierzchołek z każdej spośród 50 par: (A_2, A_{101}), (A_3, A_{100}), ..., (A_{51}, A_{52}). Podobnie do zbioru V należy dokładnie jeden wierzchołek z każdej spośród 50 par: (A_3, A_1), (A_4, A_{101}), ..., (A_{52}, A_{53}). Wierzchołek A_1 należy do zbioru V, wobec tego wierzchołek A_3 nie mógł zostać wybrany. Stąd wynika, że wierzchołek A_{100} należy do zbioru V, czyli wierzchołek A_5 doń nie należy. A zatem wybrany musiał zostać wierzchołek A_{98}.

Wierzchołki A_{98}, A_{100}, A_1 należą do zbioru V i są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, spełniające równość $a^2+b^2=c^2$. Wykaż, że liczba $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że

$$2(c-a)(c-b)=2c^2+2ab-2bc-2ac=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac=(a+b-c)^2\,.$$

Z powyższej równości wynika, że $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)=(\frac{a+b-c}{2})^2$. Ponadto $2\,|\,(a+b-c)^2$, czyli $2\,|\,a+b-c$, więc liczba $\frac{1}{2}(a+b-c)$ jest całkowita.