

Kolorowanie w zadaniach

1. Czy można pokolorować każdą ściankę sześcienną do gry, używając trzech kolorów, tak by żadne dwie ścianki sąsiadujące krawędzią nie były pokolorowane tym samym kolorem?
2. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że
 - ☐ pewne trzy boki są tego samego koloru;
 - ☐ pewne dwie przekątne są różnych kolorów;
 - ☐ z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.
3. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że
 - ☐ pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
 - ☐ pewna przekątna ściany bocznej tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
 - ☐ pewna przekątna sześcianu ma końce jednakowego koloru.
4. Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pokolorowano na czarno lub białą. Uzasadnij, że można znaleźć takie trzy liczby a , b , c , że $b - a = c - b$ i wszystkie trzy są pokolorowane tym samym kolorem.
5. Czy można pokolorować wszystkie dodatnie liczby całkowite na czerwono i niebiesko w taki sposób, by dla każdej liczby n liczby n i $2n$ były różnych kolorów?
6. Znajdź kolorowanie liczb całkowitych dodatnich, spełniające następujące warunki:
 - każda liczba jest pokolorowana na czarno lub białą
 - suma dwóch liczb tego samego koloru jest zawsze pokolorowana na czarno
 - suma dwóch liczb różnych kolorów jest zawsze pokolorowana na białą
7. Znajdź kolorowanie liczb całkowitych dodatnich, spełniające następujące warunki:
 - każda liczba jest pokolorowana na czarno lub białą
 - suma dwóch liczb różnych kolorów jest zawsze pokolorowana na czarno
 - iloczyn dwóch liczb różnych kolorów jest zawsze pokolorowana na białą
8. Na każdym polu planszy o wymiarach 5×5 znajduje się żabka. Na sygnał wszystkie żabki przeskakują na sąsiadujące pola. Czy może się zdarzyć, że ponownie na każdym polu siedzi teraz żabka?
9. W każde z dziewięciu pól kwadratu 3×3 wpisana jest liczba 0. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących pól i albo dodaniu do obu liczb w wybranych polach liczby 1, albo odjęciu od obu liczb w wybranych polach liczby 1. Czy po pewnej liczbie ruchów może się okazać, że w każde z dziewięciu pól wpisana jest liczba 2?
10. Czy skacząc konikiem szachowym można obejść wszystkie pola planszy o wymiarach 5×5 , stając na każdym polu dokładnie raz, jeśli:
 - zaczynamy z narożnego pola?
 - zaczynamy z pola sąsiadującego z narożnym polem?
11. Rozważamy szachownicę 8×8 z wyciętymi narożnymi polami leżącymi, na tej samej przekątnej. Czy można wypełnić ten obszar klockami domina?
12. Czy można wypełnić planszę 10×10 klockami o wymiarach 4×1 ? Czy można tak pokolorować planszę 10×10 na białą i czarną, by każdy klocek o wymiarach 4×1 pokrywał **dokładnie** jedno czarne pole?

13. Punkty płaszczyzny pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnij, że istnieje
- odcinek o końcach tego samego koloru
 - trójkąt równoboczny o wierzchołkach w tym samym kolorze
 - trójkąt prostokątny równoramienny o wierzchołkach tego samego koloru
14. Punkty prostej zostały pokolorowane dwoma kolorami. Udowodnij, że możemy wybrać trzy punkty w jednym kolorze, tak, że jeden jest środkiem odcinka wyznaczanego przez dwa pozostałe.
15. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z trzech kolorów. Okazało się, że każdy odcinek ma następującą własność: jeśli końce odcinka mają ten sam kolor, to jego środek jest tego samego koloru co każdy z końców, a jeśli końce odcinka mają różne kolory, to jego środek jest innego koloru niż każdy z końców. Udowodnij, że wszystkie punkty płaszczyzny pomalowano tym samym kolorem.
16. Punkty płaszczyzny pokolorowano dwoma kolorami. Okazało się, że jeśli trzy wierzchołki równoległoboku są pokolorowane jednym kolorem, to czwarty wierzchołek także jest pokolorowany tym kolorem. Udowodnij, że wszystkie punkty płaszczyzny pomalowano tym samym kolorem.