O dodatkowym wielbłądzie,

O dodatkowym wielbłądzie,

czyli

do czego na lekcjach matematyki potrzebny jest nauczyciel

Każdy zapewne pamięta, jak – będąc w szkole – pomagaliśmy mniej zainteresowanym matematyką kolegom w pokonywaniu trudności z jej opanowaniem.

Zapewne często wydawało się nam, że to właśnie my uczymy matematyki, a nauczyciel pełni rolę “aparatu nacisku” – wskazuje, co ma być opanowane, kontroluje i karze (względnie nagradza).

Za takim poglądem przemawiał też fakt, że również korzystający z naszej pomocy koledzy byli zdania, iż dopiero od nas nauczyli się matematyki, zrozumieli, o co chodzi.

Każdy zapewne pamięta, jak – będąc w szkole – pomagaliśmy mniej zainteresowanym matematyką kolegom w pokonywaniu trudności z jej opanowaniem.

Zapewne często wydawało się nam, że to właśnie my uczymy matematyki, a nauczyciel pełni rolę “aparatu nacisku” – wskazuje, co ma być opanowane, kontroluje i karze (względnie nagradza).

Za takim poglądem przemawiał też fakt, że również korzystający z naszej pomocy koledzy byli zdania, iż dopiero od nas nauczyli się matematyki, zrozumieli, o co chodzi.

Tak radykalny pogląd sugerowałby rewolucyjne zmiany w nauczaniu i może nawet wyeliminowanie nauczycieli, którzy mogliby zostać – bez żadnej szkody – zastąpieni np. przez jakieś urządzenie elektroniczne.

Jednak tak się nie dzieje.

Wypada postawić pytanie – dlaczego?
Co dodatkowego (poza funkcjami organizacyjno–kontrolnymi) wnosi nauczyciel w stosunku do pomagającego w nauce kolegi?

Jednak tak się nie dzieje.

Wypada postawić pytanie – dlaczego?
Co dodatkowego (poza funkcjami organizacyjno–kontrolnymi) wnosi nauczyciel w stosunku do pomagającego w nauce kolegi?

Jakimś tropem w poszukiwaniu odpowiedzi może być spostrzeżenie, iż nauczyciel dysponuje – w odróżnieniu od kolegi – wykształceniem matematycznym, wykraczającym poza program szkolny.

Czy ma (względnie może mieć) z tego jakiś pożytek?

Przykład superprymitywny,
a więc łatwo czytelny:

Dodatkowy wielbłąd

Przykład superprymitywny,
a więc łatwo czytelny:

Dodatkowy wielbłąd

Umierający właściciel 11 wielbłądów polecił,
aby po jego śmierci
połowę z nich oddać najstarszemu z synów,
czwartą część średniemu,
a część szóstą najmłodszemu.

Otóż wydaje mi się, że rolą nauczyciela w klasie jest wskazanie owego dodatkowego wielbłąda, o którego istnieniu dowiedział się podczas studiów (albo też tam nauczył się go szukać).

Innymi słowy, nauczyciel – wiedząc o miejscu,
jakie w matematyce zajmuje przedstawiany uczniom problem –
powinien im wskazywać w owym problemie te jego aspekty,
których niewprawnym okiem dostrzec się nie da.

I na tym polega jego przewaga nad kolegą pomagającym
w nauce, bo ten jedynie doskonali w używaniu tego, co jawnie
jest pod ręką, wyrabia sprawność, a nie poszerza horyzontu.

Otóż wydaje mi się, że rolą nauczyciela w klasie jest wskazanie owego dodatkowego wielbłąda, o którego istnieniu dowiedział się podczas studiów (albo też tam nauczył się go szukać).

Innymi słowy, nauczyciel – wiedząc o miejscu,
jakie w matematyce zajmuje przedstawiany uczniom problem –
powinien im wskazywać w owym problemie te jego aspekty,
których niewprawnym okiem dostrzec się nie da.

I na tym polega jego przewaga nad kolegą pomagającym
w nauce, bo ten jedynie doskonali w używaniu tego, co jawnie
jest pod ręką, wyrabia sprawność, a nie poszerza horyzontu.

Pozostaje mi zatem już tylko
podać mniej prymitywne przykłady.

Przykład nietrywialny pierwszy

Trzy walce (Igor Fiodorowicz Szarygin)

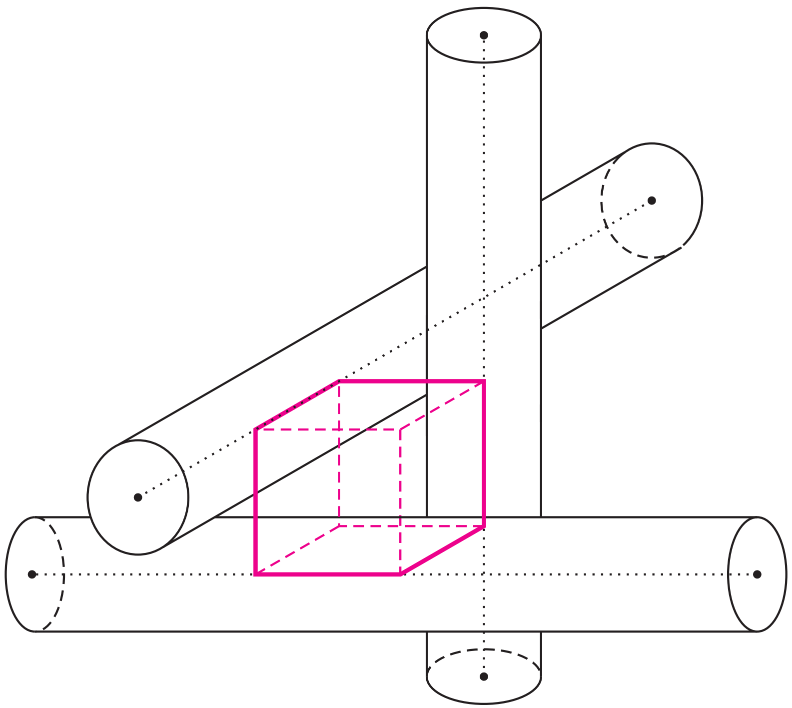
Jak szeroki walec można włożyć pomiędzy trzy jednakowe, parami prostopadłe walce?

Wielbłądem są tutaj:

proste skośne i odcinki realizujące ich odległość.

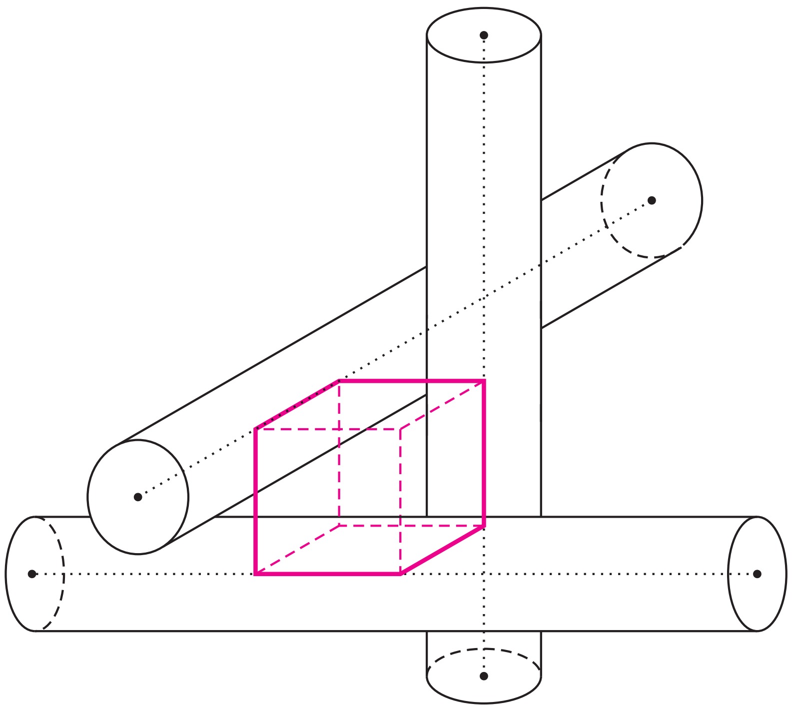
Wielbłądem są tutaj:

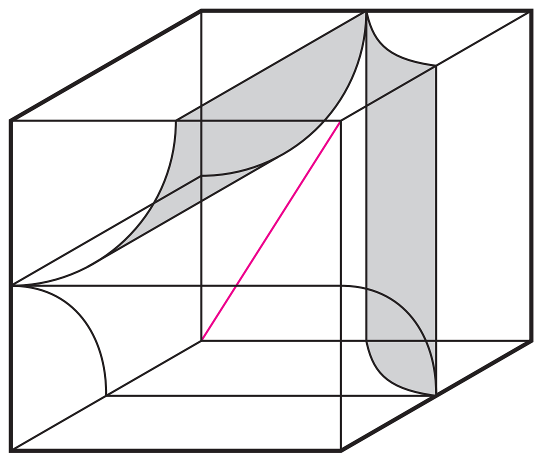
proste skośne i odcinki realizujące ich odległość.



Wielbłądem są tutaj:

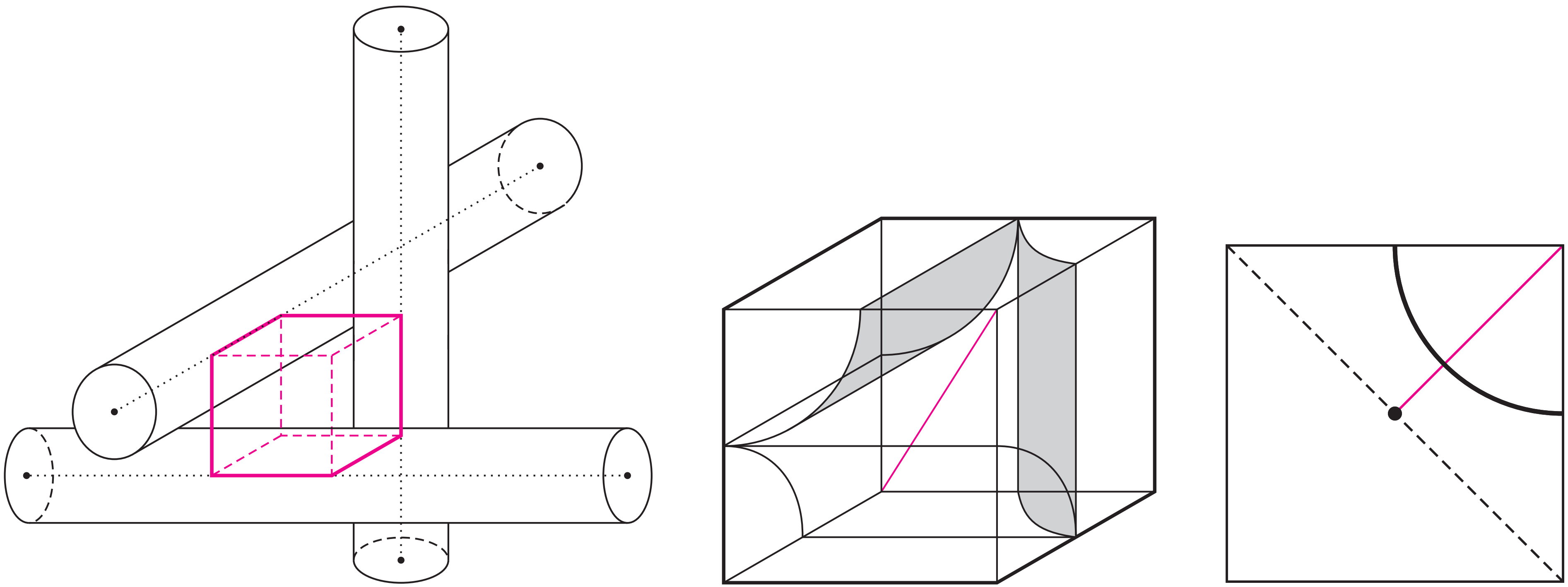
proste skośne i odcinki realizujące ich odległość.





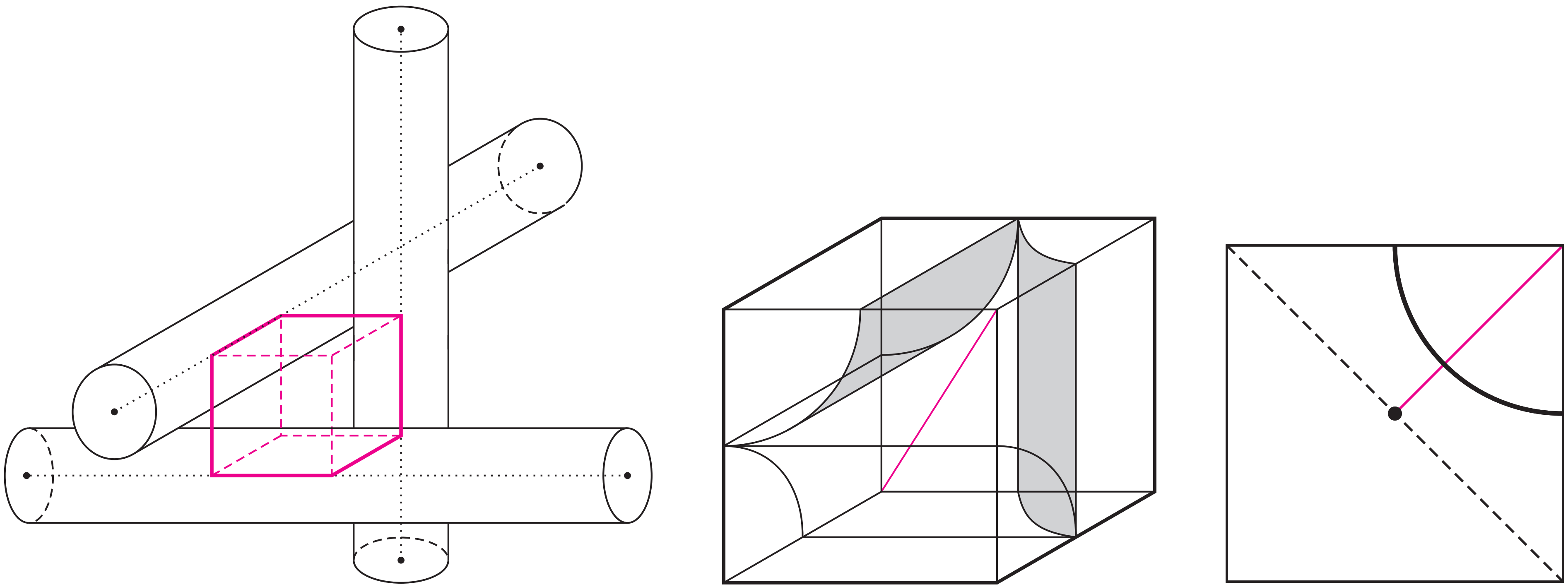
Wielbłądem są tutaj:

proste skośne i odcinki realizujące ich odległość.



Wielbłądem są tutaj:

proste skośne i odcinki realizujące ich odległość.



$$(\sqrt{2} - 1)R$$

Przykład nietrywialny drugi

Trzy kulki w sześcianie (*Delta*)

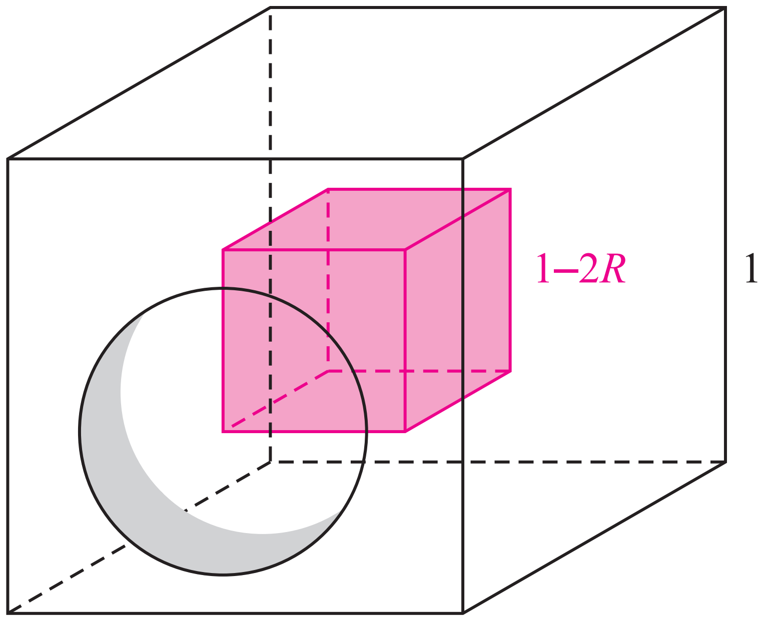
Jaki promień mogą mieć trzy jednakowe kulki mieszczące się w sześcianie o krawędzi 1?

Wielbłądem jest tutaj:

otoczka (choć nie musimy jej tak nazywać)

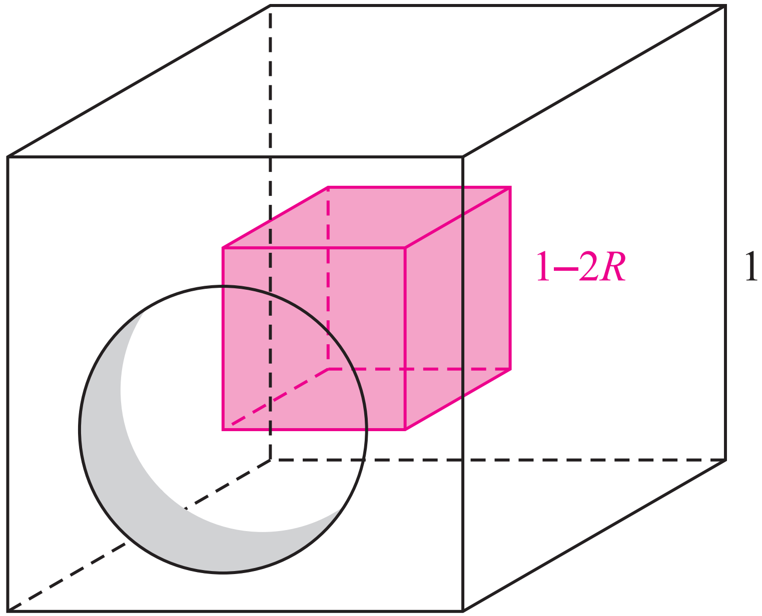
Wielbłądem jest tutaj:

otoczka **(choć nie musimy jej tak nazywać)**



Wielbłądem jest tutaj:

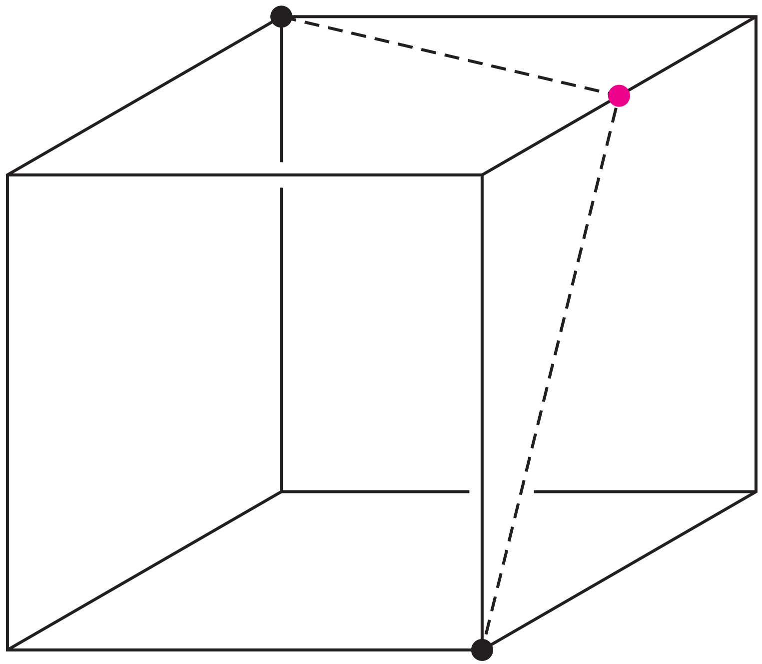
otoczka (choć nie musimy jej tak nazywać)



i do rozwiązania mamy zadanie

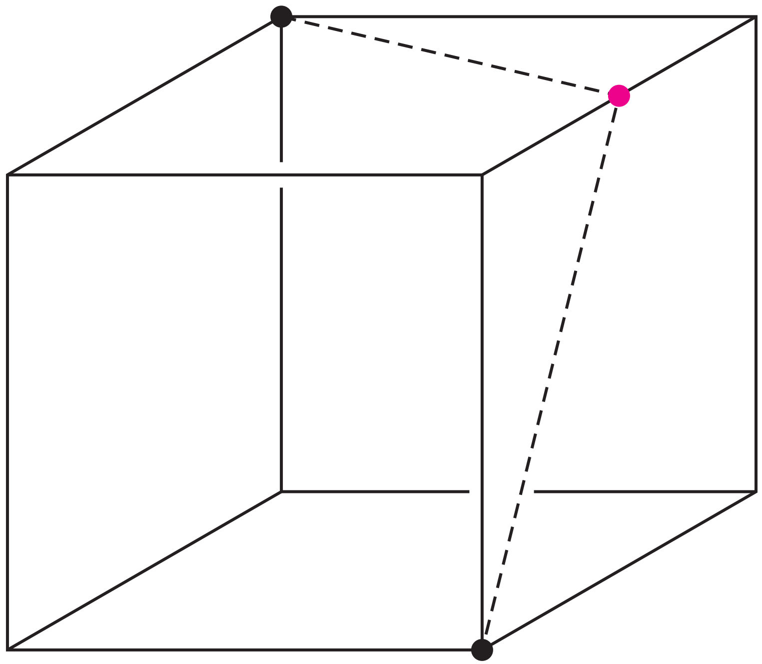
znaleźć w sześcianie o krawędzi $k = 1 - 2R$ *trzy najbardziej od siebie oddalone punkty.*

Pomysł, by wziąć dwa maksymalnie odległe punkty i dobrać do nich trzeci



daje odległość $(k\sqrt{5})/2$.

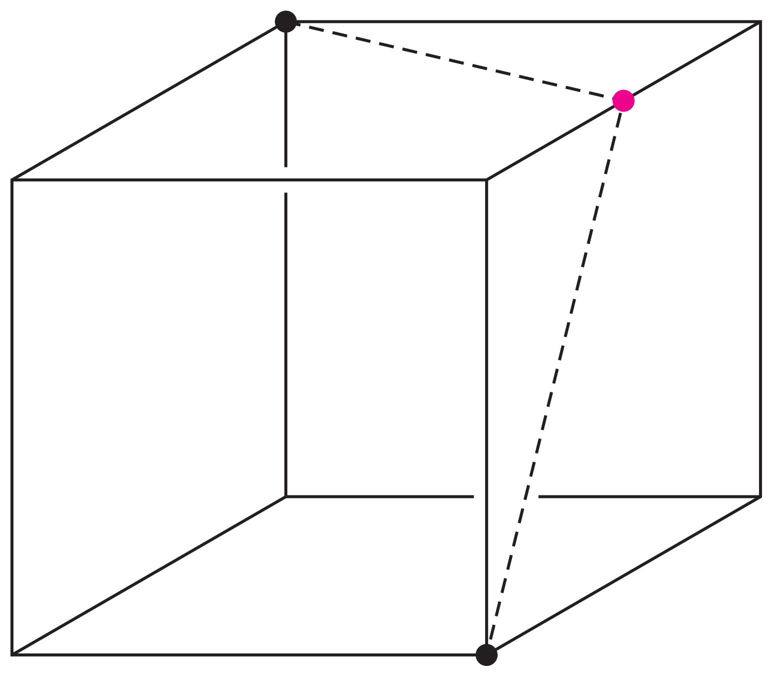
Pomysł, by wziąć dwa maksymalnie odległe punkty i dobrać do nich trzeci



daje odległość $(k\sqrt{5})/2$.

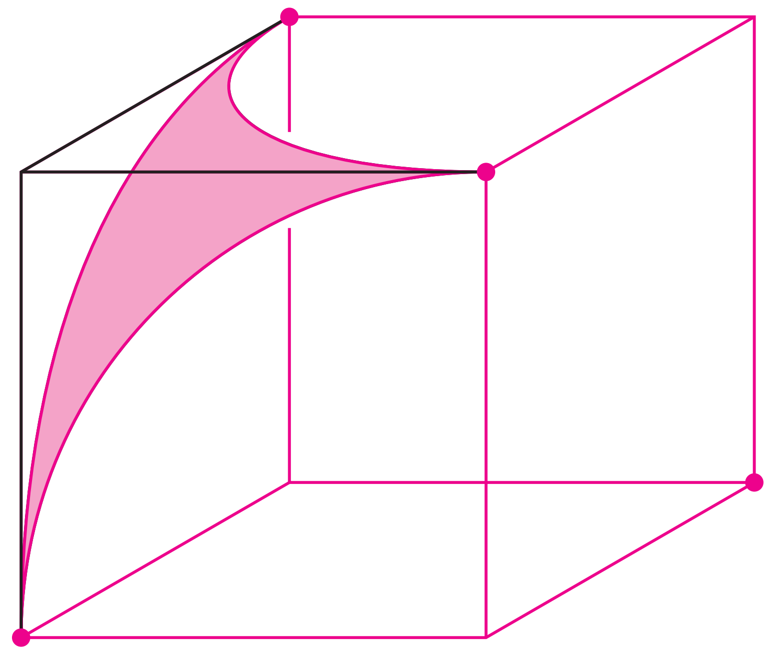
Lepiej wziąć najodleglejsze punkty jednej ściany, bo tego poprawić się już nie da.

Pomysł, by wziąć dwa maksymalnie odległe punkty i dobrać do nich trzeci



daje odległość $(k\sqrt{5})/2$.

Lepiej wziąć najodleglejsze punkty jednej ściany, bo tego poprawić się już nie da.



Stąd najlepszy wynik to $k\sqrt{2}$.

Pozwala to na obliczenie
maksymalnego promienia trzech kulek
mieszczących się w jednostkowym sześcianie:

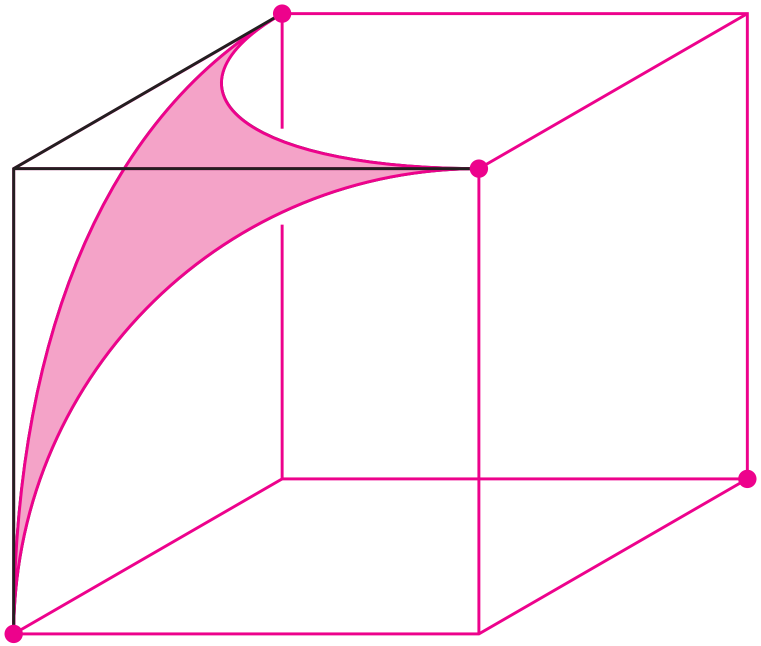
$$k\sqrt{2} = (1 - 2R)\sqrt{2} = 2R,$$

zatem

$$R = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

czyli blisko 0,3.

Z rysunku



nauczyciel wyciągnie jeszcze jednego wielbłąda:

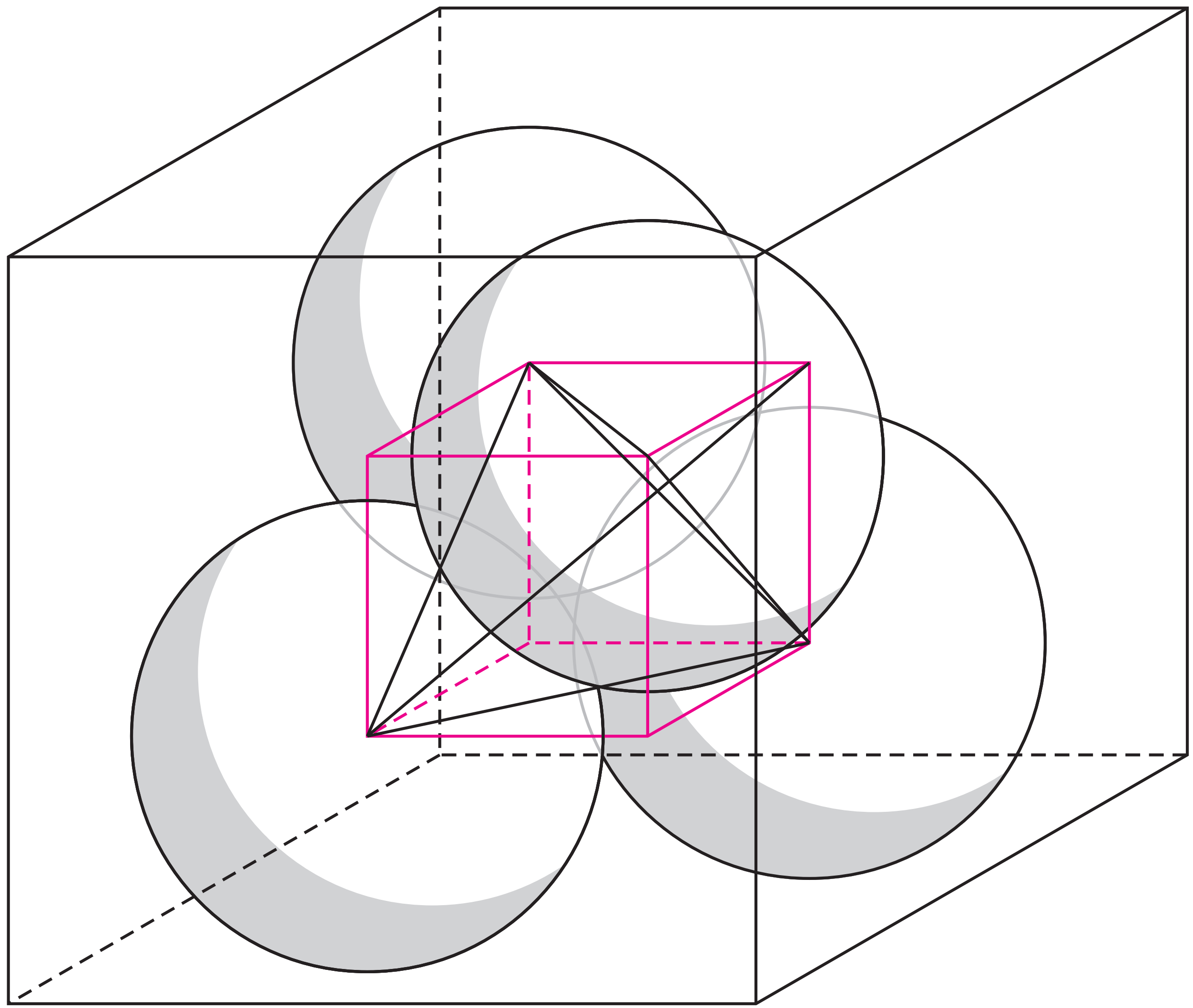
w sześcianie o krawędzi k
punktów, z których każdy jest odległy
od pozostałych o $k\sqrt{2}$ jest aż cztery!

Niechcący uzyskaliśmy w ten sposób piękne

Twierdzenie

Jeśli w sześcianie zmieszczą się trzy jednakowe kulki, to zmieści się też i taka sama czwarta.

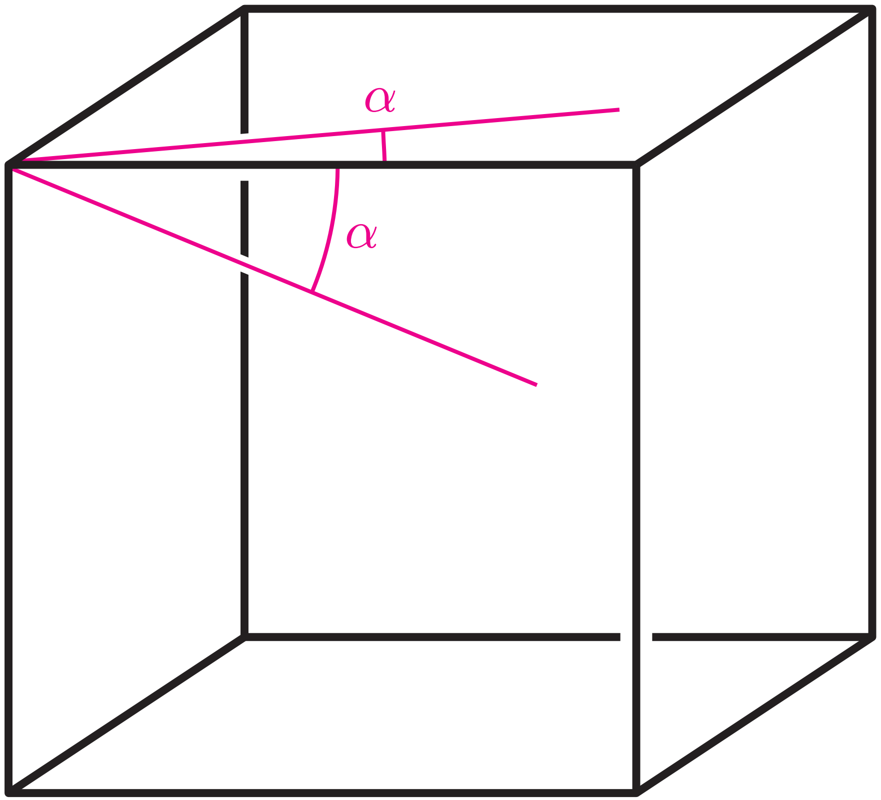
co pięknie widać na rysunku.



Przykład nietrywialny trzeci

Ile obcięliśmy? (Stefan Kulczycki)

Sześcian jednostkowy przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek i przecinającą dwie ze ścian, do których ten wierzchołek należy wzdłuż odcinków tworzących ten sam kąt α *z ich wspólną krawędzią; obliczyć objętość odciętej bryły.*



– każdy widzi, że rozwiązaniem jest

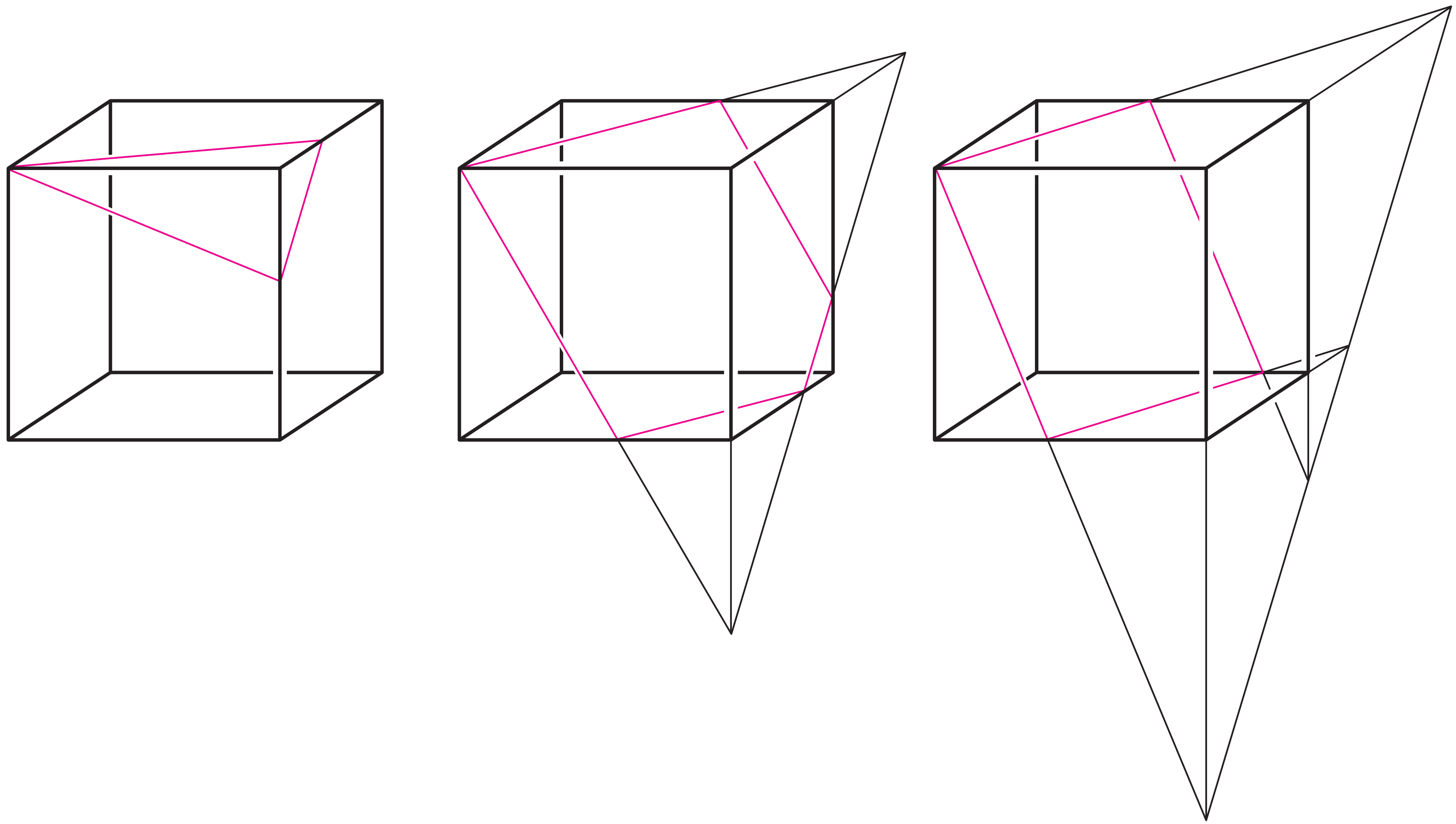
$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha$$

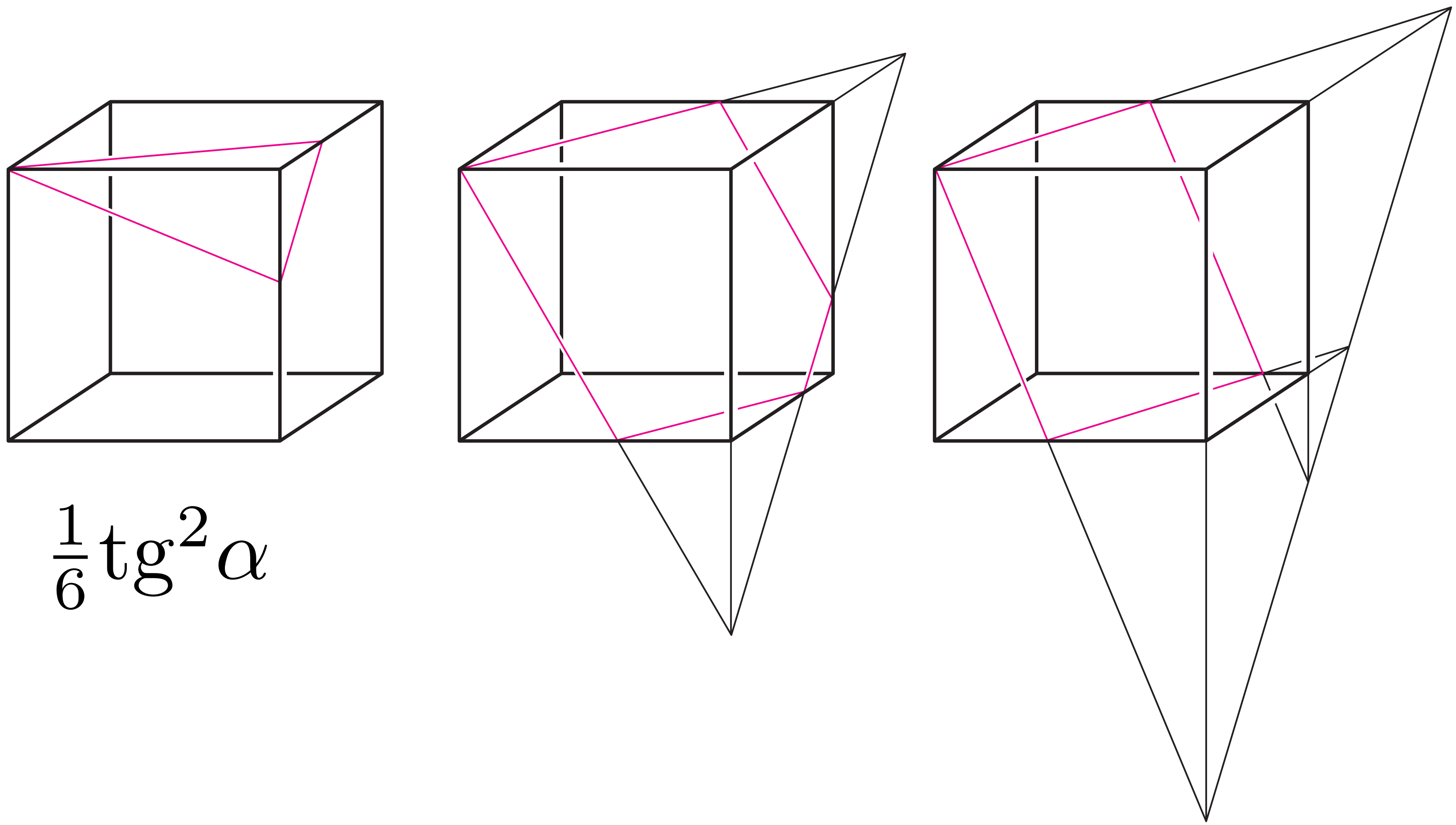
Tu dodatkowy wielbłąd to

część wspólna zbiorów

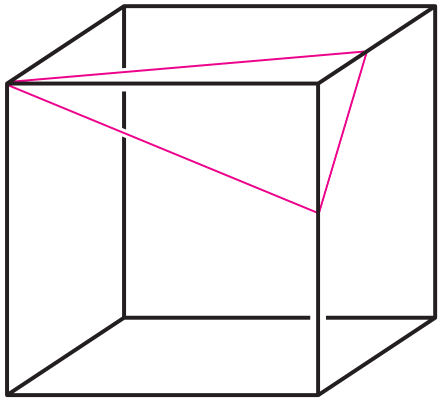
Tu dodatkowy wielbłąd to

część wspólna zbiorów

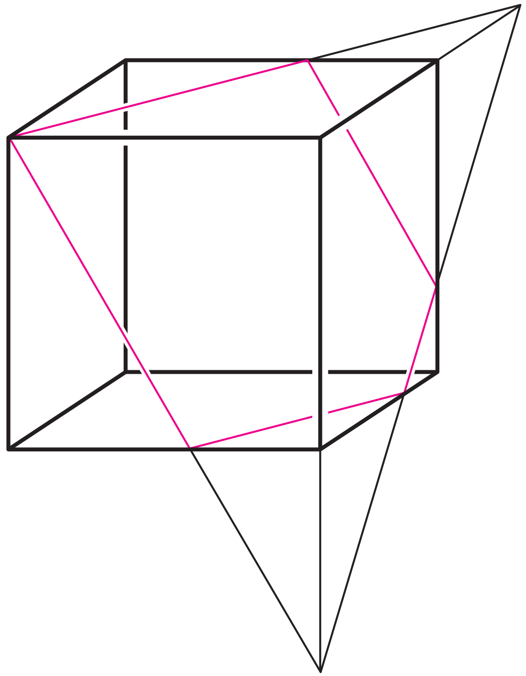


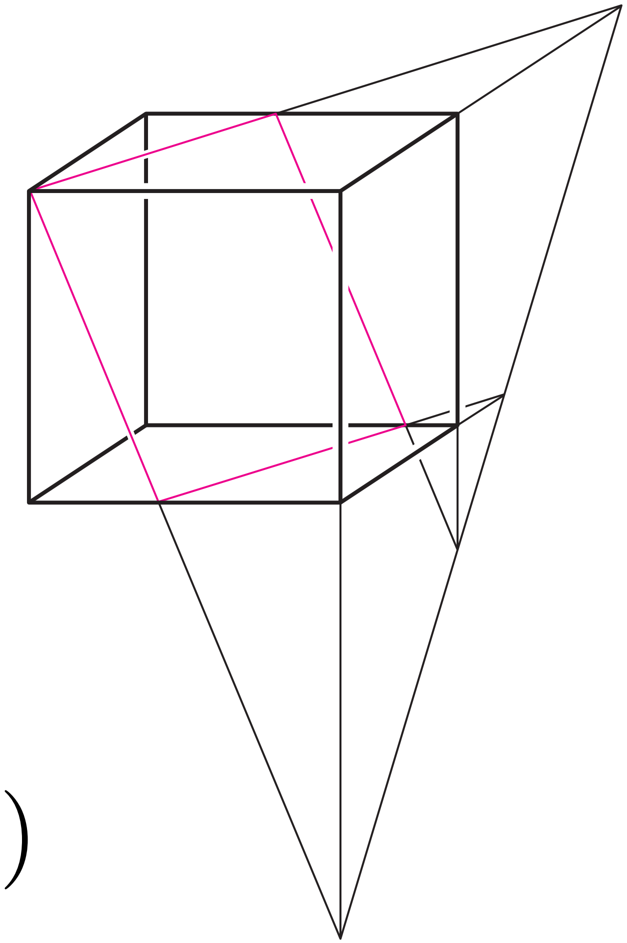


$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha$$

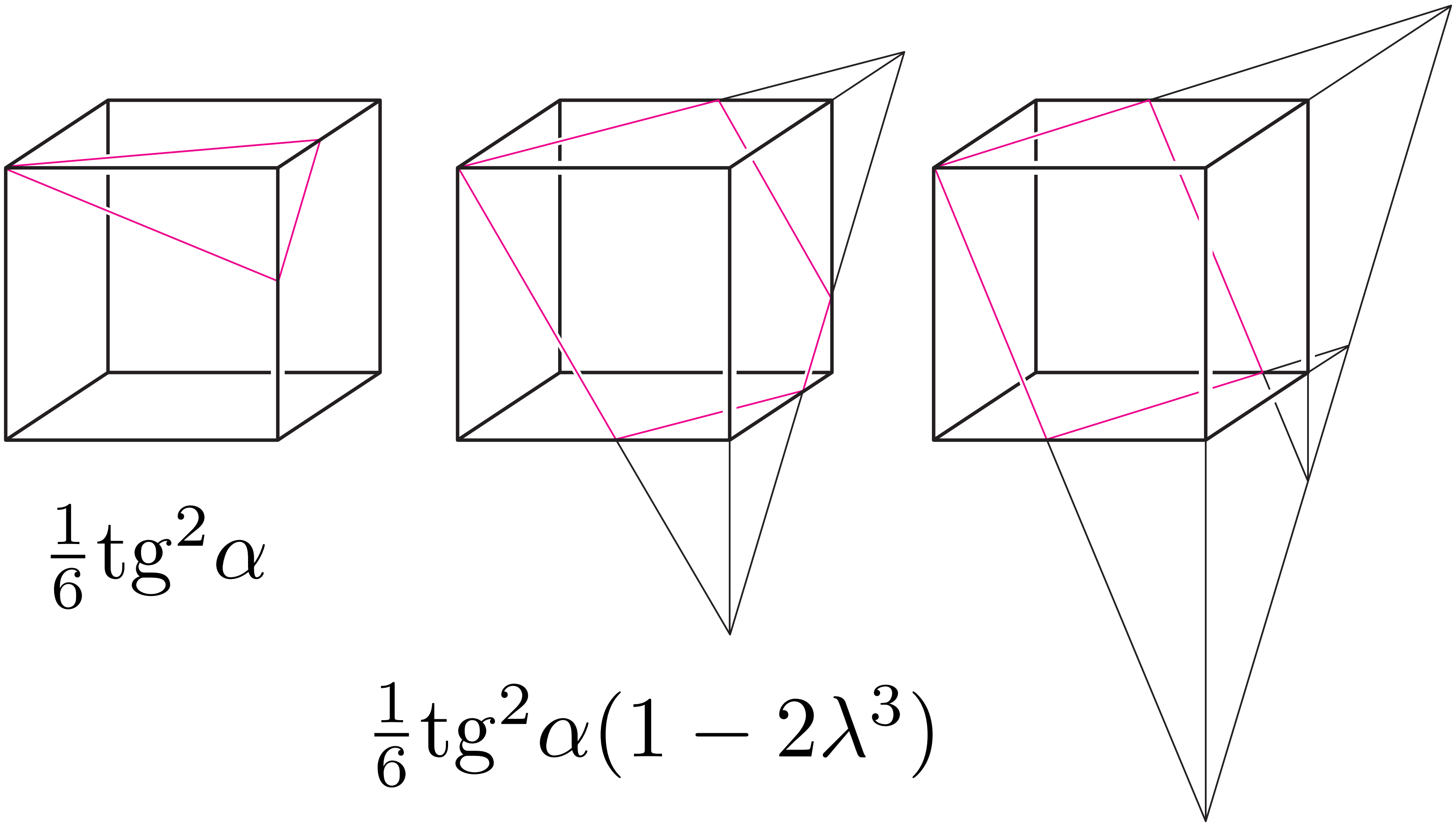


$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha$$





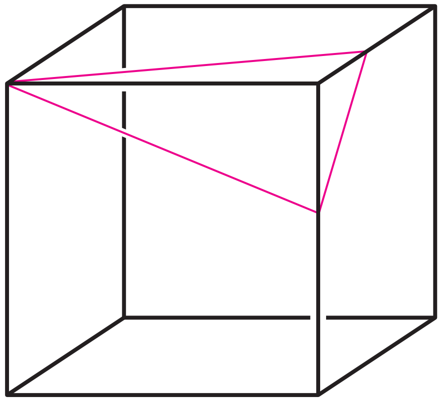
$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1-2\lambda^3)$$



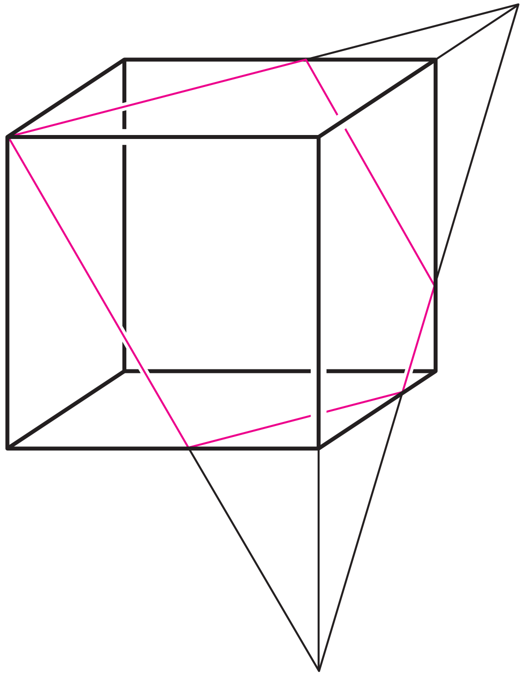
$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1-2\lambda^3)$$

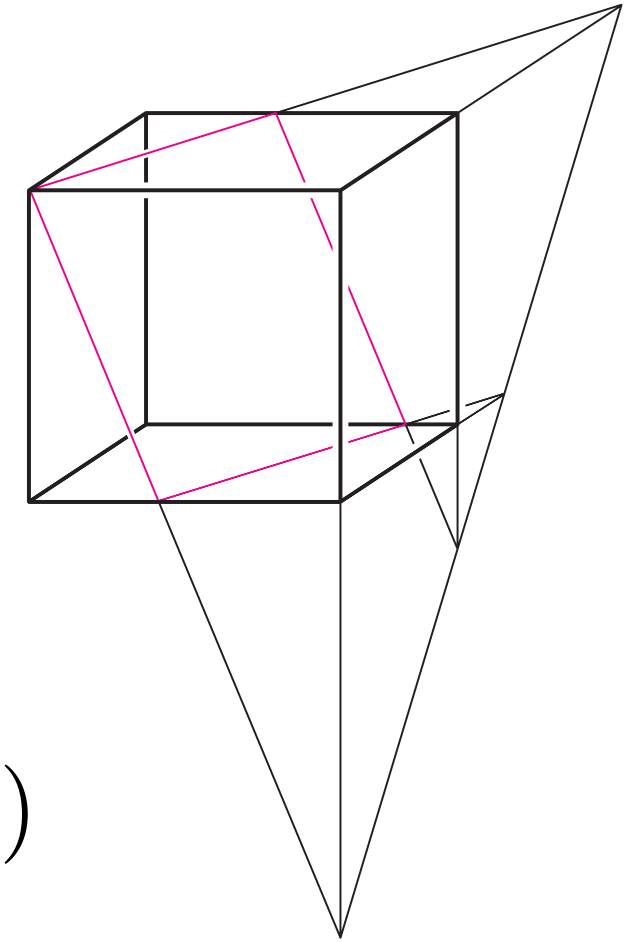
$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1-2\lambda^3+\mu^3)$$



$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha$$



$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1-2\lambda^3)$$



$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\alpha(1-2\lambda^3+\mu^3)$$

gdzie $\lambda = (\operatorname{tg}\alpha - 1)/\operatorname{tg}\alpha$ i $\mu = (\operatorname{tg}\alpha - 2)/\operatorname{tg}\alpha.$

Przykład nietrywialny czwarty

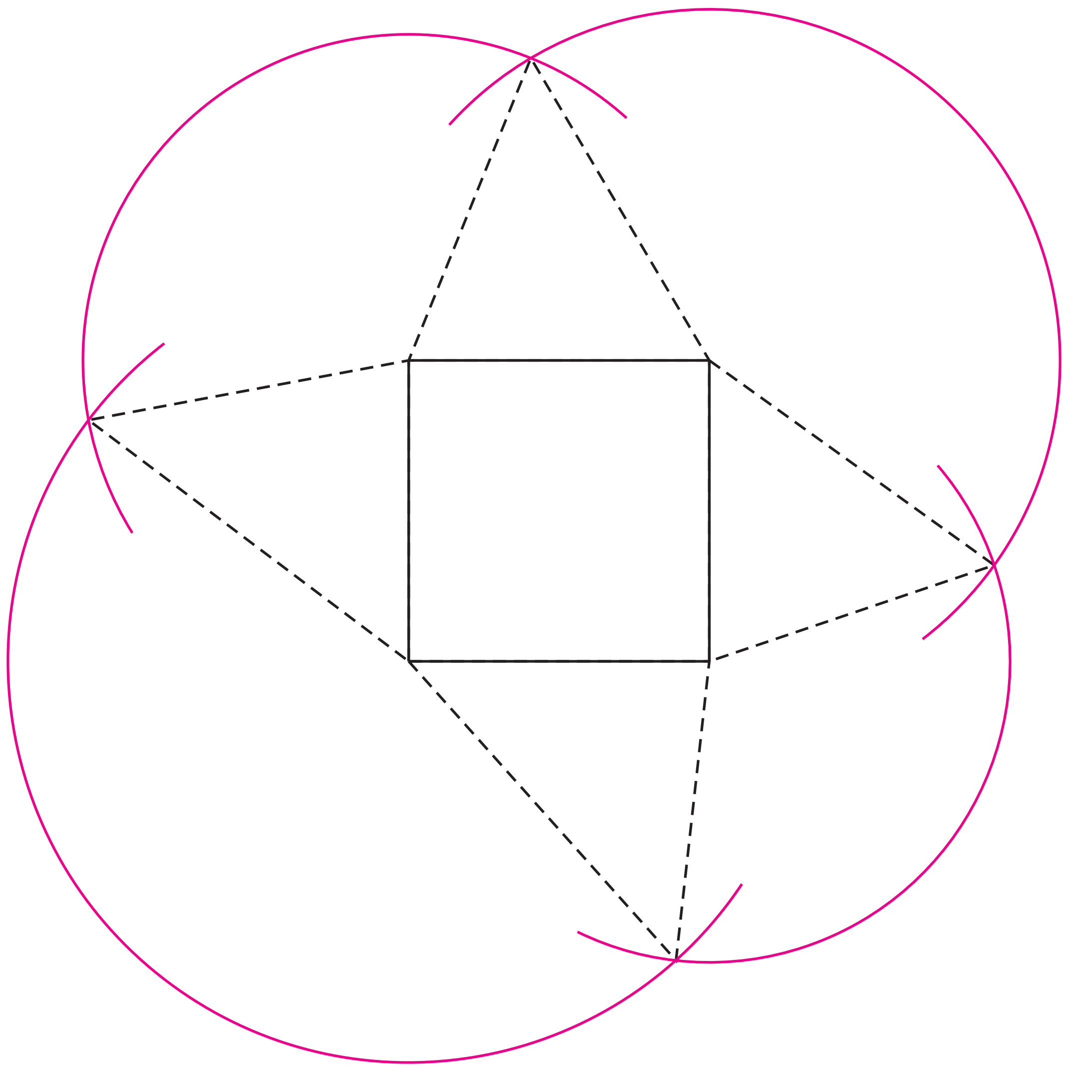
Krzyżodziób

(śp. Kolegium na MIM UW)

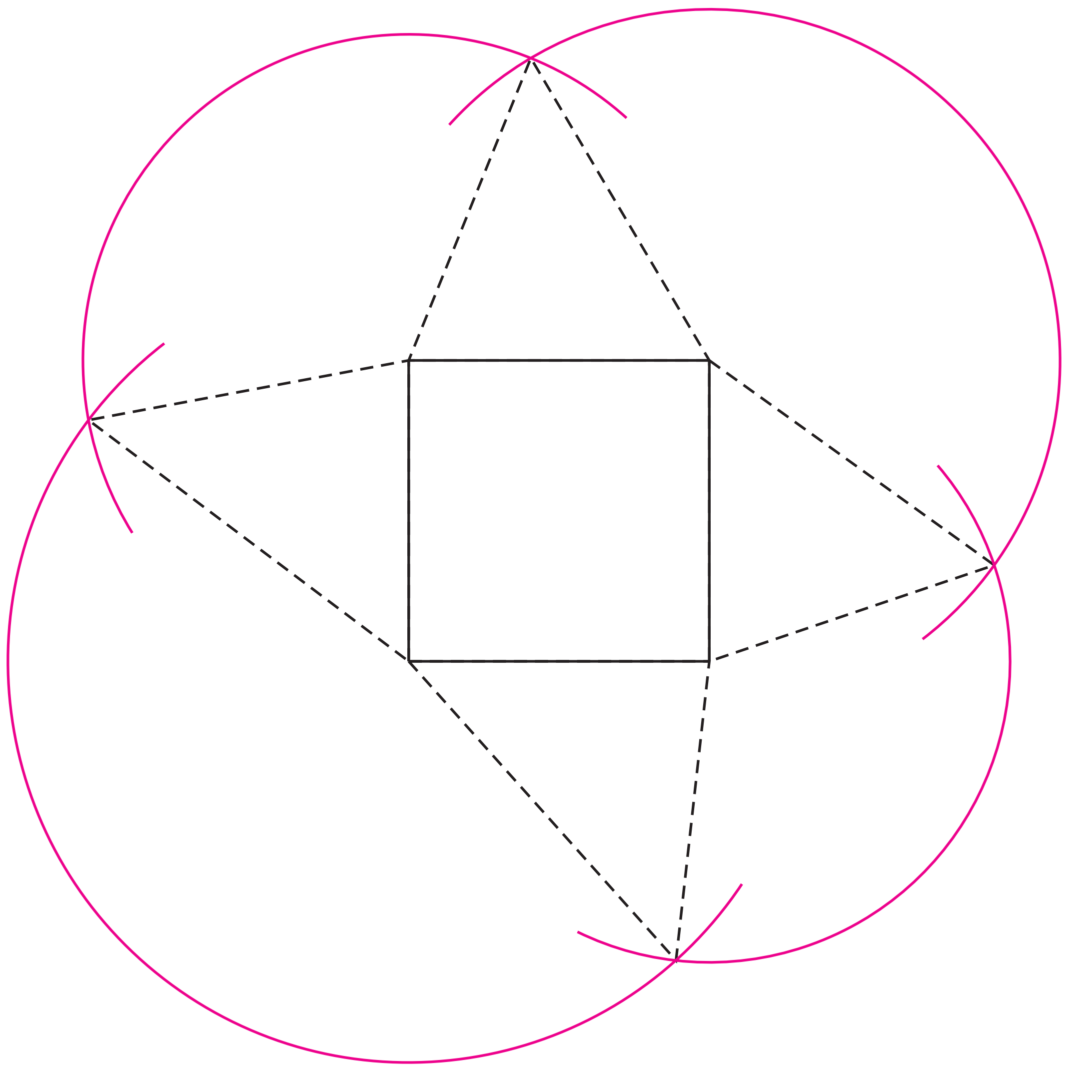
Narysuj siatkę ostrosłupa
o podstawie kwadratowej,
którego każda z krawędzi bocznych
jest innej długości.

Rozwiązanie jest oczywiste

Rozwiązanie jest oczywiste



Rozwiązanie jest oczywiste



i błędne.

Dodatkowym wielbłądem,

pozwalającym nauczycielowi wyjaśnić, dlaczego
po sklejeniu dwóch kolejnych ścian i dwóch pozostałych
otrzymane dzioby mijają się,

jest

wysokość ostrosłupa

i jej spodek.

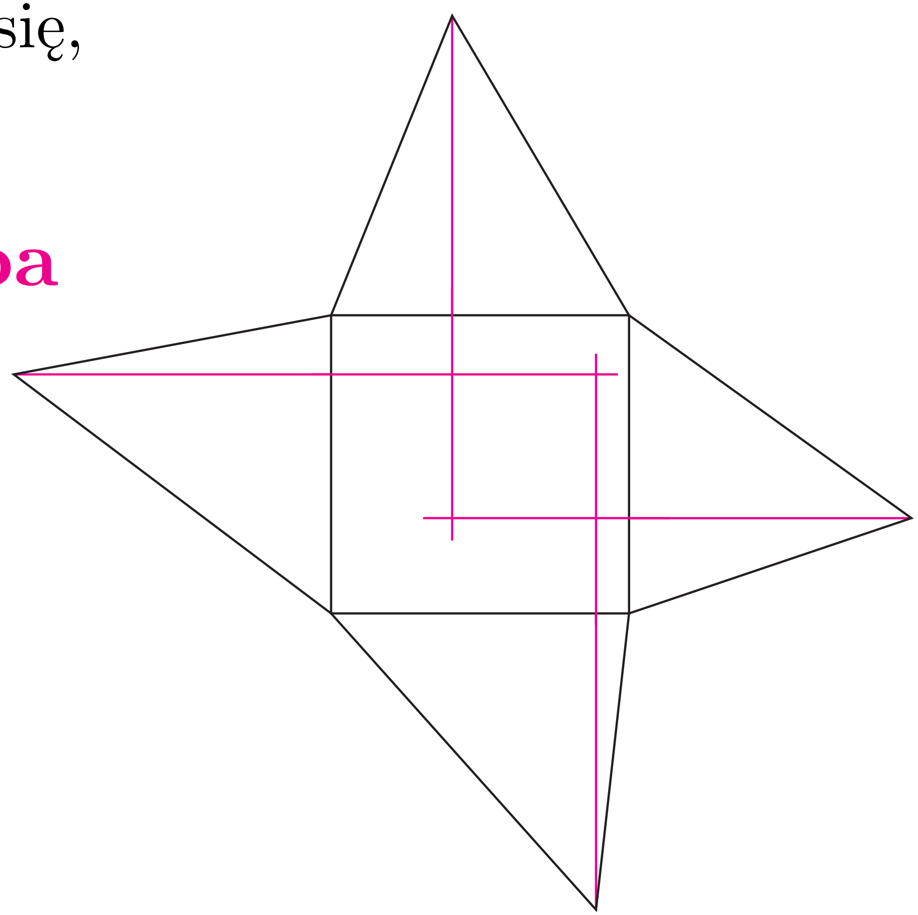
Dodatkowym wielbłądem,

pozwalającym nauczycielowi wyjaśnić, dlaczego
po sklejeniu dwóch kolejnych ścian i dwóch pozostałych
otrzymane dzioby mijają się,

jest

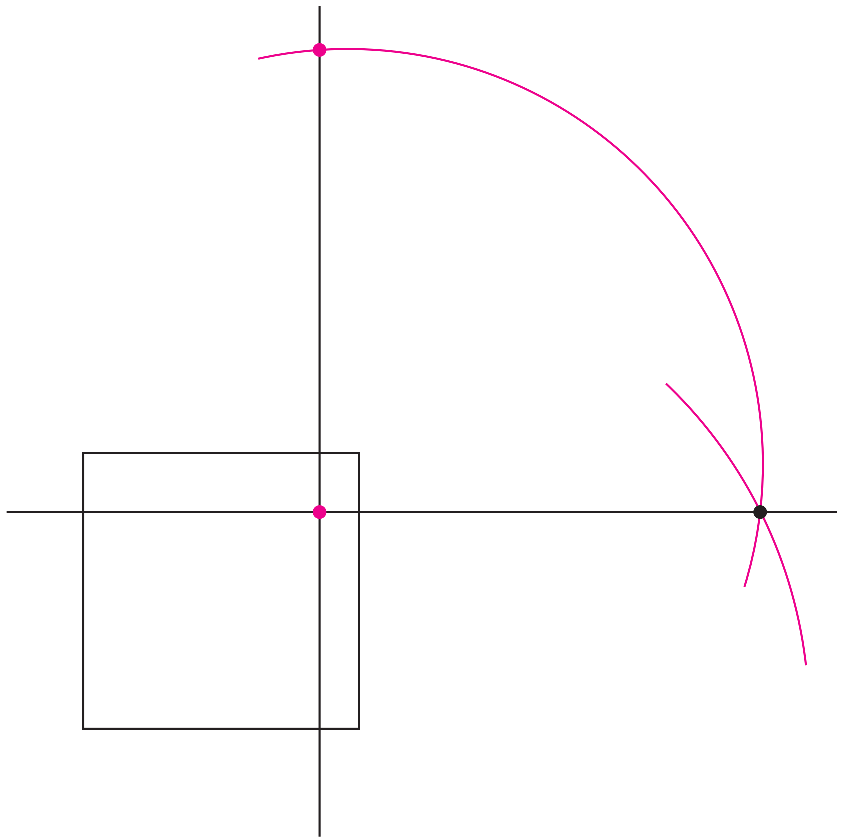
wysokość ostrosłupa

i jej spodek.



Zatem trzeba

zacząć od narysowania spodka wysokości



– i znów nauczyciel ma przeprowadzić dysputę,
gdzie go obrać, aby krawędzie boczne były różnej długości

Przykład piąty – magiczny

Kto wygra? (folklor)

Gra dwuosobowa: spośród liczb

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

gracze zabierają na zmianę po jednej

tak, by szybciej od przeciwnika
z trzech z nich ukłądać dokładnie 15.

Który z nich ma strategię wygrywającą?

Oto magiczny wielbłąd:

4	**3**	**8**
9	**5**	**1**
2	**7**	**6**

Oto magiczny wielbłąd:

4	**3**	**8**
9	**5**	**1**
2	**7**	**6**

Bo przecież nasza gra to zwykłe “kółko i krzyżyk” na tej planszy.

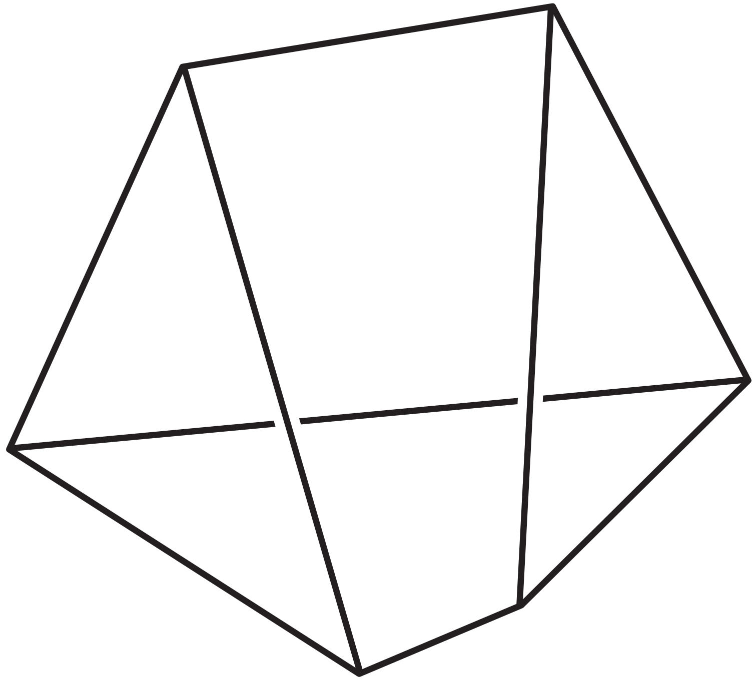
Przykład szósty – paradoksalny

Coś czego nie ma (znów *Delta*)

Narysuj takie coś
ale nie gryfa czy smoka,
lecz wielościan.

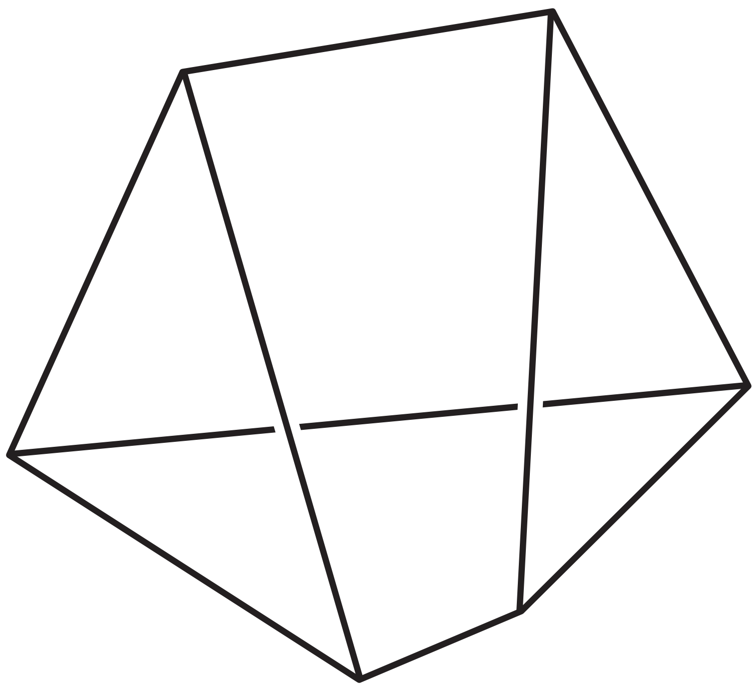
A gdy uczniowie zakrzykną, że takie polecenie to oksymoron
(poloniści wiedzą, co to znaczy)

nauczyciel wyciąga kolejnego wielbłąda:



A gdy uczniowie zakrzykną, że takie polecenie to oksymoron
(poloniści wiedzą, co to znaczy)

nauczyciel wyciąga kolejnego wielbłąda



Skąd wiadomo, że ten wielościan nie istnieje?

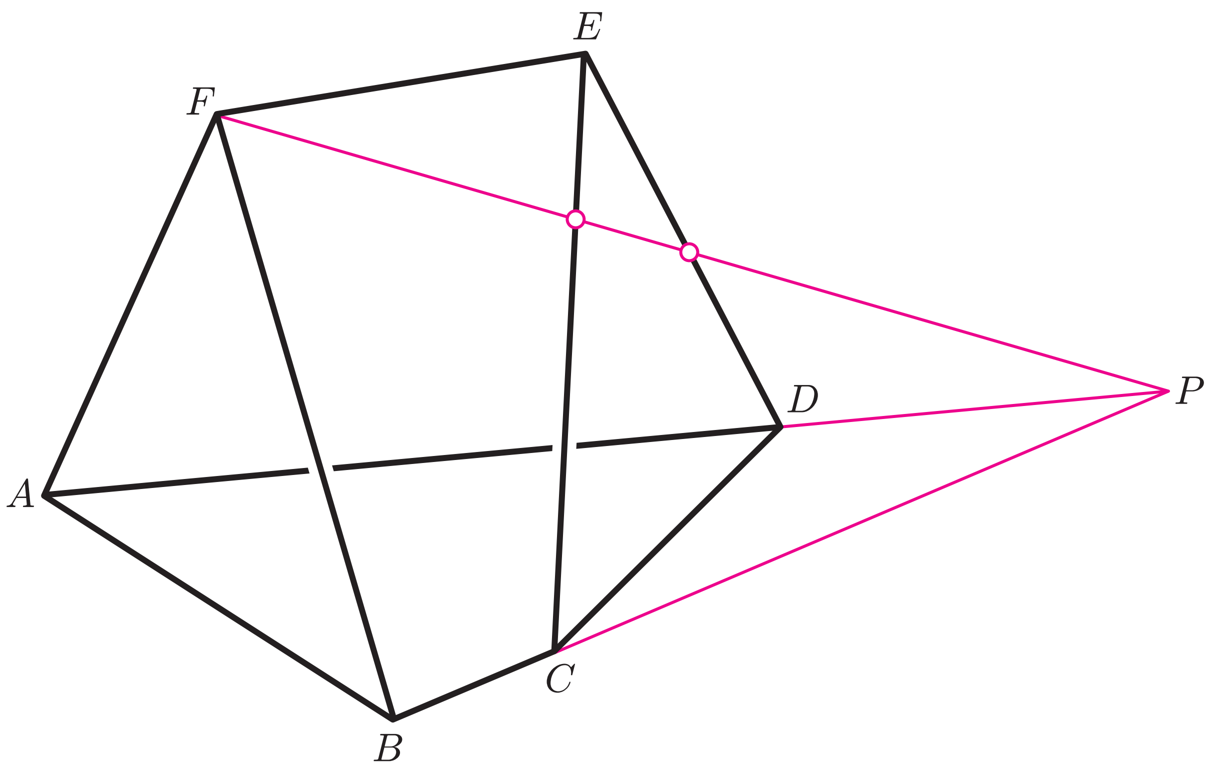
Ponieważ

nierównoległe proste przecinają się

wtedy i tylko wtedy

gdy leżą na jednej płaszczyźnie,

więc



Przykład siódmy – wielkiej wagi

Swobodny spadek (Galileusz)

Galileusz obaliwszy rozwiązanie Arystotelesa zaproponował inną zależność – proporcjonalność prędkości do czasu, $v(t) = a \cdot t$ i postanowił sprawdzić to doświadczalnie.

Galileusz obaliwszy rozwiązanie Arystotelesa zaproponował inną zależność – proporcjonalność prędkości do czasu, $v(t) = a \cdot t$ i postanowił sprawdzić to doświadczalnie.

Wobec niedysponowania praktycznie żadnym zegarem, zdecydował, że ruch należy spowolnić, a narzędziem do tego przydatnym może być równia pochyła.

Na niej zależność prędkości od czasu będzie taka sama, z tym, że współczynnik proporcjonalności będzie inny, jakieś a_1.

Galileusz obaliwszy rozwiązanie Arystotelesa
zaproponował inną zależność –
proporcjonalność prędkości do czasu, $v(t) = a \cdot t$
i postanowił sprawdzić to doświadczalnie.

Wobec niedysponowania praktycznie żadnym zegarem,
zdecydował, że ruch należy spowolnić,
a narzędziem do tego przydatnym może być równia pochyła.

Na niej zależność prędkości od czasu będzie taka sama,
z tym, że współczynnik proporcjonalności będzie inny, jakieś a_1.

Każde doświadczenie należy przygotować teoretycznie.

Najpierw obliczenie drogi: skoro na początku prędkość jest 0,
a po czasie t jest równa at, to średnia prędkość jest równa $at/2$,
co po czasie t da drogę $at^2/2$.
Na równi będzie to oczywiście $a_1t^2/2$.

I tu dwa genialne wielbłądy.

Pierwszy to wektor.

Drugi to twierdzenie:

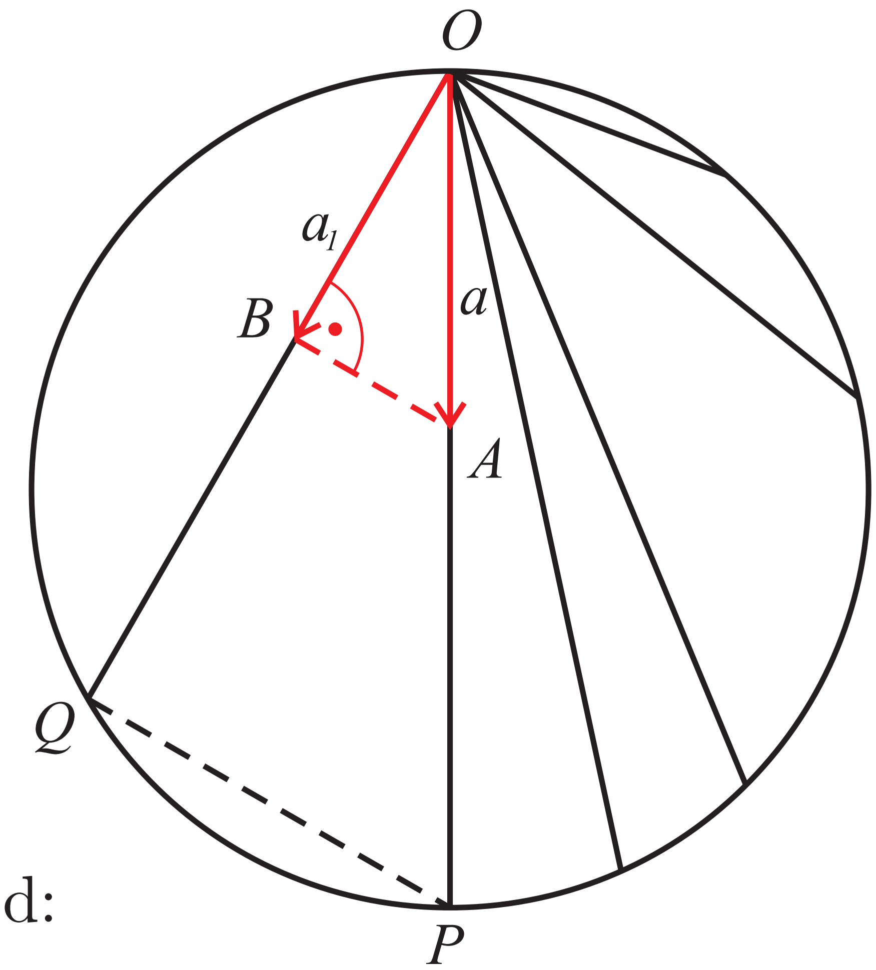
Spadek ciała
po każdej z cięciw
wychodzących
z najwyższego punktu
pionowo ustawionego okręgu
trwa tyle samo czasu.

I tu dwa genialne wielbłądy.

Pierwszy to wektor.

Drugi to twierdzenie:

Spadek ciała
po każdej z cięciw
wychodzących
z najwyższego punktu
pionowo ustawionego okręgu
trwa tyle samo czasu.

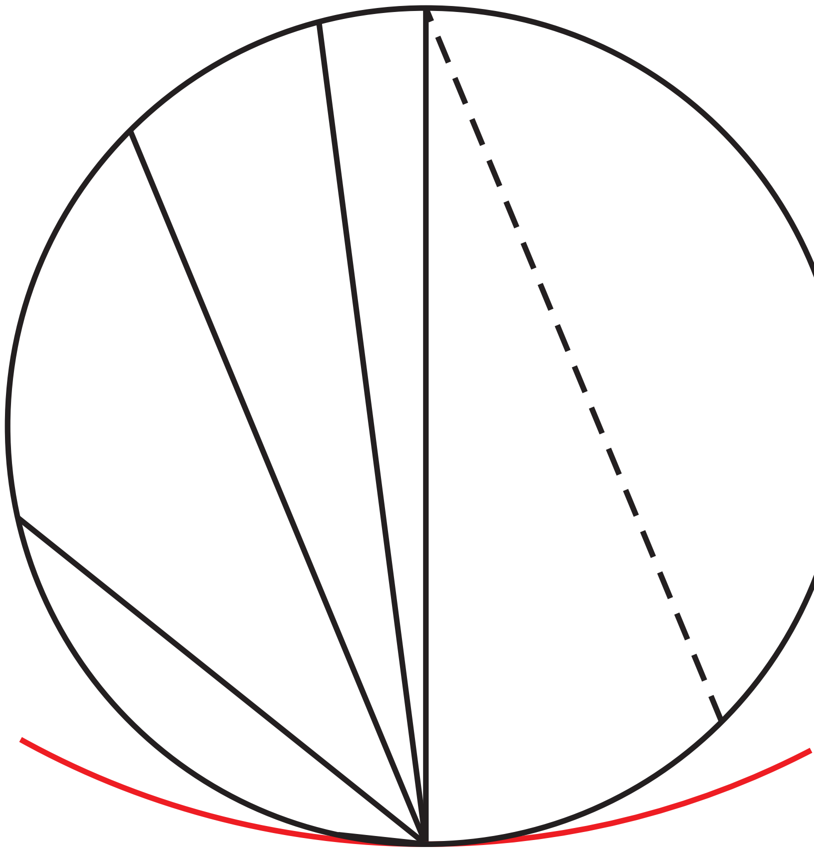


I uderzający swą prostotą dowód:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{OQ}{OP} = \frac{\frac{a_1 \cdot t_1^2}{2}}{\frac{a \cdot t^2}{2}} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{t_1^2}{t^2}, \quad \text{skąd } \ t_1^2 = t^2 \ \text{ i } \ t_1 = t.$$

I zaplanowanie doświadczenia.

Nietrudno zauważyć, że
spadanie po cięciwach
kończących się
w najniższym punkcie okręgu
też będzie trwało
tyle samo czasu.
Weźmy więc cięciwę
bardzo, bardzo krótką
– ona doskonale przybliża
zarówno łuk "własnego" okręgu,
jak (jeszcze lepiej)
łuk okręgu o środku w jego najwyższym punkcie.
Stąd badania wahadła w bazylice, bo ich ruch był tak powolny,
że dawał się jakoś porównywać.



Tak więc Galileusz uzyskał potwierdzenie swojego opisu swobodnego spadku.

I, na dodatek, twierdzenie:

okres wahadła nie zależy od wychyleń, gdy są one małe, czyli o kąt, którego miara nie odbiega istotnie od wartości jego sinusa.

Przykład rekreacyjny do domu

Coś czego nie ma (stary jak świat)

Narysuj ośmiokąt
mający dokładnie pięć osi symetrii.

POWODZENIA!

Matematyka

– czego naprawdę warto się uczyć?

(według Martina Gardnera)

Dość rozpowszechnione jest mniemanie, że

MATEMATYKA TO JEST TO,

CO ROBIĄ MATEMATYCY.

A więc uczniowie myślą, że matematyka to jest to

A więc uczniowie myślą, że matematyka to jest to, czego się uczą w szkole,

A więc uczniowie myślą, że matematyka to jest to,
czego się uczą w szkole,
a to przekonanie
dostarcza im traumatycznych przeżyć na studiach.

A więc uczniowie myślą, że matematyka to jest to,
czego się uczą w szkole,
a to przekonanie
dostarcza im traumatycznych przeżyć na studiach.

Aby temu zapobiec, napisano np.

Co to jest matematyka?
Couranta i Robbinsa,

Geometrię poglądową
Hilberta i Cohn-Vossena,

czy
Kalejdoskop matematyczny
Steinhausa,

nie licząc popularyzacji w stylu
Lilavati, π *razy drzwi*, **czy** *Kapitan Zerko*

Martin Gardner nie był matematykiem,
a nawet do końca życia uważał, że nim nie został.

Martin Gardner nie był matematykiem,
a nawet do końca życia uważał, że nim nie został.

W związku z tym widoczna coraz bardziej powszechność

stosowania modeli matematycznych
we wszystkich dziedzinach życia

kazała mu postawić pytanie, co on
(czyli niebędąca matematykami większość społeczeństwa)
powinien zaczerpnąć z matematyki,
by mógł prawidłowo i bez obaw
posługiwać się tymi wszystkimi strukturami.

Odpowiedź była bardzo prosta
– i może dlatego dla wielu do dziś niedostrzegalna –

nie będąc matematykiem,

z matematyki trzeba zaczerpnąć

nie jej wyniki i pojęcia ani sposób manipulowania nimi,

lecz

sposób myślenia.

Odpowiedź była bardzo prosta
– i może dlatego dla wielu do dziś niedostrzegalna –

nie będąc matematykiem,

z matematyki trzeba zaczerpnąć

nie jej wyniki i pojęcia ani sposób manipulowania nimi,

lecz

sposób myślenia.

I upowszechnieniem tego przekonania

zajmował się całe życie.

Przykład I : PUCHARY

W jednym pucharze jest woda, w drugim wino.

Zaczerpnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wlano do pierwszego.

Potem zaczerpnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wlano do drugiego.

Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?

Przykład II : KOLEJKA

Codziennie o 16:00 mąż powraca z pracy kolejką podmiejską do rodzinnego Iksinowa.

W tym też momencie jego żona zajeżdża na przystanek swoim samochodem, by odwieźć go do domu.

Pewnego razu mężowi udało się wsiąść do godzinę wcześniejszej kolejki.

Po przyjeździe do Iksinowa ruszył pieszo na spotkanie żony.

Gdy spotkała go na drodze i powrócili do domu, okazało się, że są 10 minut wcześniej niż zwykle.

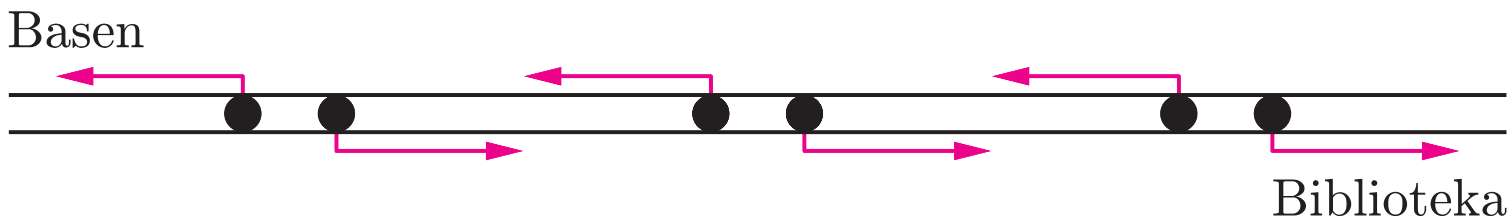
Ile czasu mąż szedł pieszo?

Przykład III : TRAMWAJ

Jaś po obiedzie biegnie na przystanek
i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj.
Jadące w prawo wiozą go do biblioteki,
a jadące w lewo – na basen.
W każdą stronę tramwaje jeżdżą regularnie co dziesięć minut.
Po półroczu okazało się, że Jaś
cztery razy częściej bywał na basenie niż w bibliotece.
Czy można wyjaśnić tę niesymetryczność,
nie kwestionując tego, że
obiady są podawane z dużą, losową nieregularnością,
a Jaś tak samo lubi basen, jak bibliotekę?

Przykład III : TRAMWAJ

Jaś po obiedzie biegnie na przystanek
i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj.
Jadące w prawo wiozą go do biblioteki,
a jadące w lewo – na basen.
W każdą stronę tramwaje jeżdżą regularnie co dziesięć minut.
Po półroczu okazało się, że Jaś
cztery razy częściej bywał na basenie niż w bibliotece.
Czy można wyjaśnić tę niesymetryczność,
nie kwestionując tego, że
obiady są podawane z dużą, losową nieregularnością,
a Jaś tak samo lubi basen, jak bibliotekę?

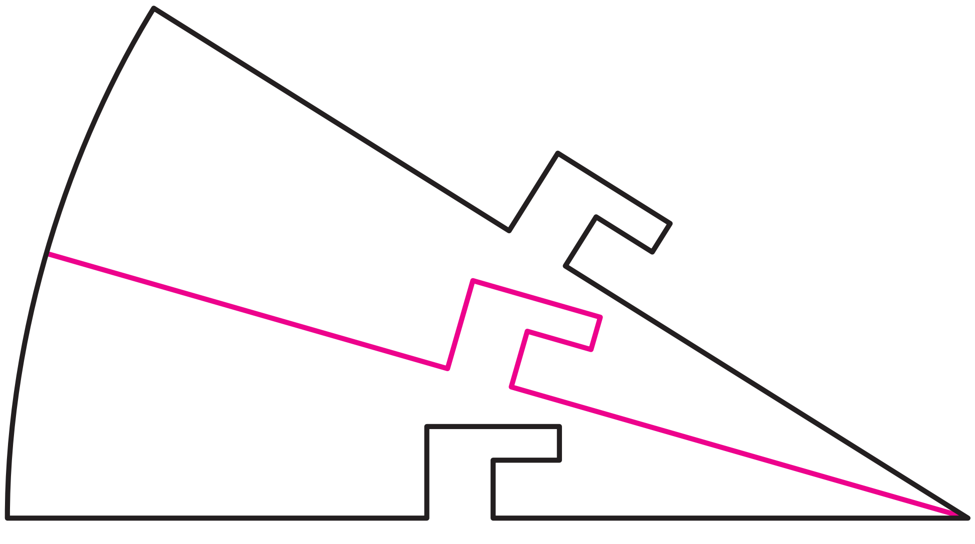


Przykład IV : ODETNIJ POŁOWĘ,

czyli przetnij przedstawioną figurę na dwie identyczne części.

Przykład IV : ODETNIJ POŁOWĘ,

czyli przetnij przedstawioną figurę na dwie identyczne części.



Przykład V : CIĘCIE PIŁĄ

Jak wiadomo, sześcian dzieli się na 27 sześcianów o trzy razy krótszej krawędzi.

Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które pozwolą to zrealizować?

Uzyskane w jakimś cięciu kawałki można ułożyć jedne na drugich i ciąć za jednym zamachem.

Nie sposób jednak nie zadać pytania

CZY TAKA

GARDNEROWSKA MATEMATYKA

TO TA SAMA MATEMATYKA,

KTÓRĄ UPRAWIAJĄ ZAWODOWCY?

DOWÓD I: SOCJOLOGICZNY

DOWÓD I: SOCJOLOGICZNY

Większość zarówno wybitnych,

jak i szeregowych matematyków

uważa, że to, co proponuje Gardner,

wyraża ich sposób myślenia,

a na dodatek jest – jako przygoda intelektualna –

atrakcyjne również dla nich samych.

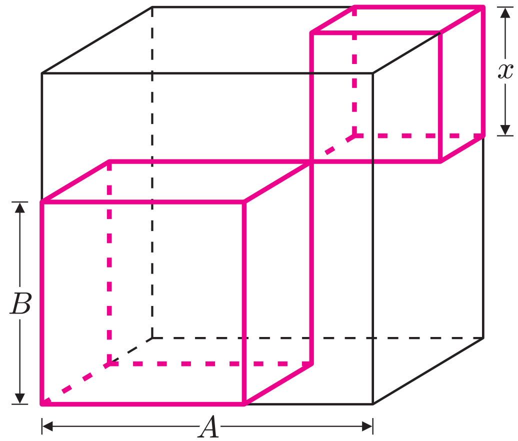
DOWÓD II: HISTORYCZNY

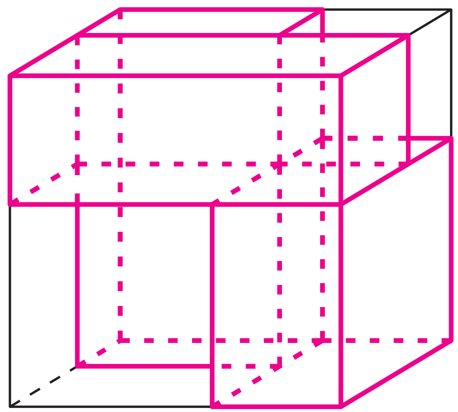
DOWÓD II: HISTORYCZNY

A. RÓWNANIE STOPNIA TRZECIEGO

DOWÓD II: HISTORYCZNY

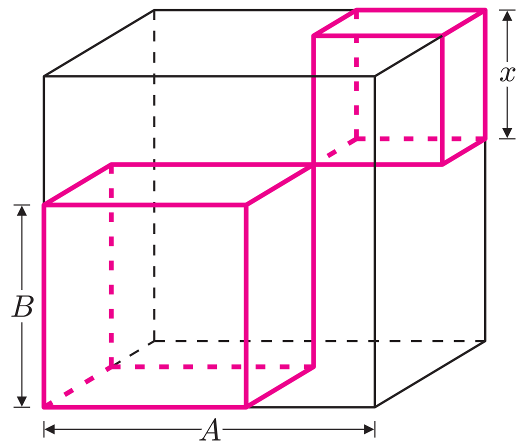
A. RÓWNANIE STOPNIA TRZECIEGO

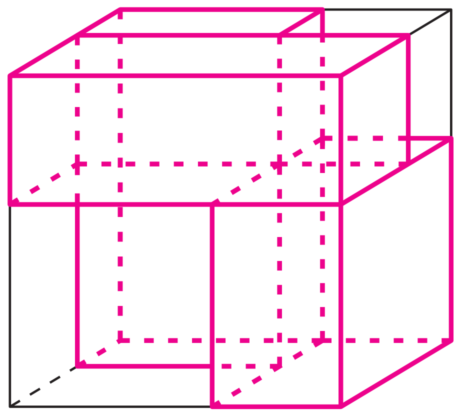




DOWÓD II: HISTORYCZNY

A. RÓWNANIE STOPNIA TRZECIEGO

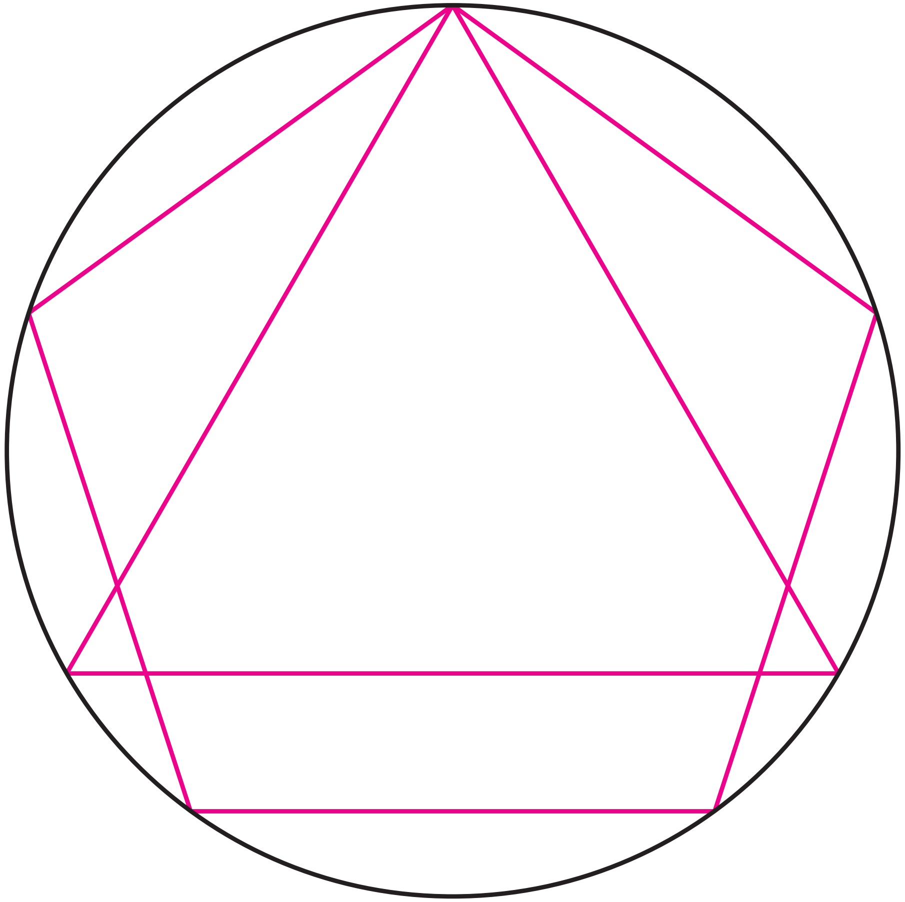




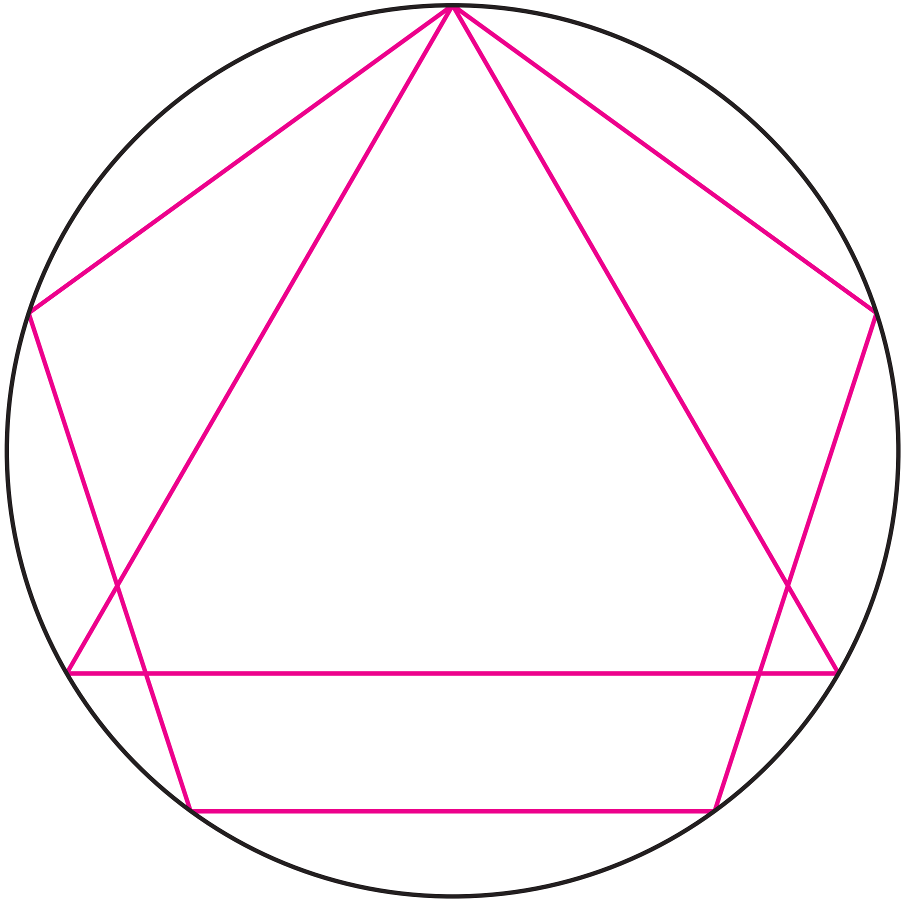
$$x = A - B = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

DOWÓD II: HISTORYCZNY

B. KONSTRUKCJA WIELOKĄTA FOREMNEGO



DOWÓD II: HISTORYCZNY
B. KONSTRUKCJA WIELOKĄTA FOREMNEGO



$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$$

DOWÓD II: HISTORYCZNY

C. LICZNOŚĆ LICZB PIERWSZYCH

$$31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$$

DOWÓD II: HISTORYCZNY

C. LICZNOŚĆ LICZB PIERWSZYCH

$$31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$$

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Pozostaje pytanie

CZY MOŻNA TAK UCZYĆ W SZKOLE?

Pozostaje pytanie

CZY MOŻNA TAK UCZYĆ W SZKOLE?

czyli

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

Pozostaje pytanie

CZY MOŻNA TAK UCZYĆ W SZKOLE?

czyli

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

czy takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

Pozostaje pytanie

CZY MOŻNA TAK UCZYĆ W SZKOLE?

czyli

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

czy takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

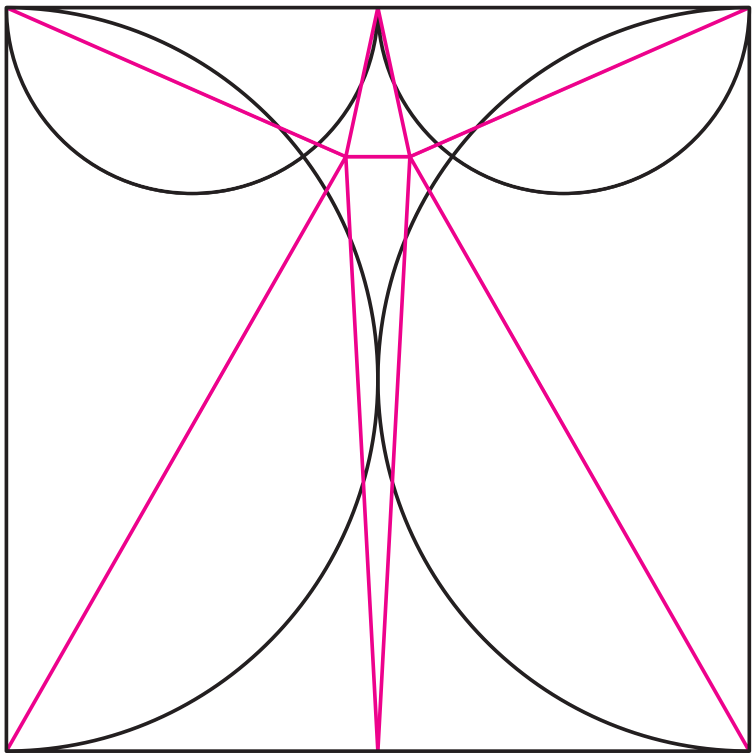
czy potrafilibyśmy to zrobić?

PYTANIE I

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

Przykład

Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne.

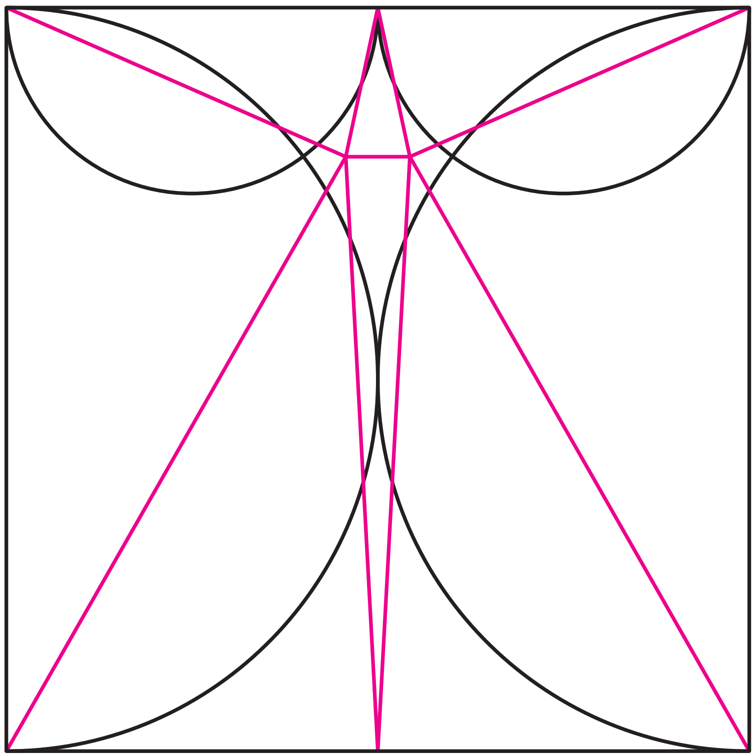


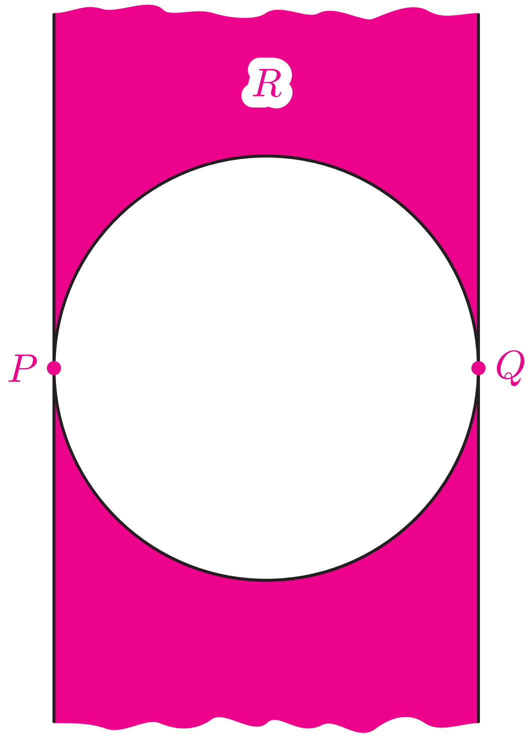
PYTANIE I

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

Przykład

Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne.



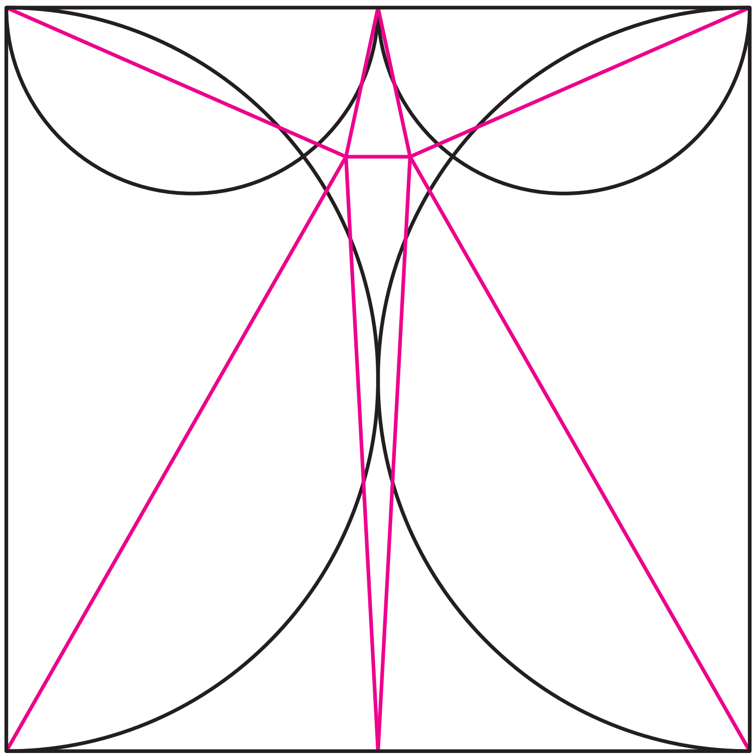


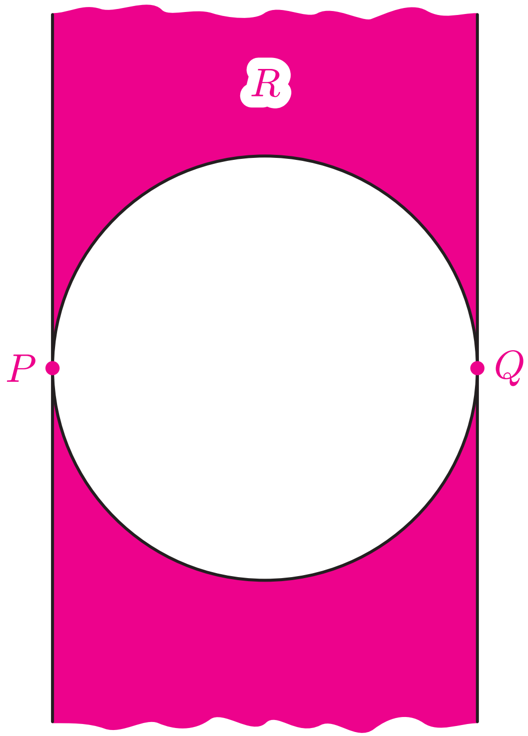
PYTANIE I

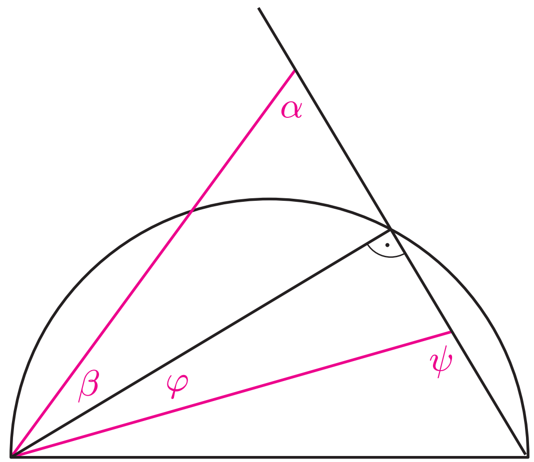
czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

Przykład

Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne.







PYTANIE II

czy takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

Przykład I

Nikt nie sądzi, że budowniczowie katedr gotyckich uprawiali lub choćby znali geometrię na poziomie, powiedzmy, Euklidesa, o Archimedesie nie wspominając. A to, co stworzyli, jest najpiękniejszym zastosowaniem geometrii wszech czasów. Oni geometrii nie znali – oni myśleli geometrycznie.

PYTANIE II

czy takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

Przykład I

Nikt nie sądzi, że budowniczowie katedr gotyckich uprawiali lub choćby znali geometrię na poziomie, powiedzmy, Euklidesa, o Archimedesie nie wspominając. A to, co stworzyli, jest najpiękniejszym zastosowaniem geometrii wszech czasów. Oni geometrii nie znali – oni myśleli geometrycznie.

Przykład II

Każdy pas transmisyjny używany na dzisiejszej polskiej wsi jest wstęgą Möbiusa, co łatwo sprawdzić. Rzecz jasna, nikt tego nie wie – bo i po co? Wystarczy, że wszyscy wiedzą, że takie pasy ścierają się dwa razy wolniej od walcowych.

PYTANIE III

czy potrafilibyśmy tak uczyć?

PYTANIE III

czy potrafilibyśmy tak uczyć?

NIE

PYTANIE III

czy potrafilibyśmy tak uczyć?

NIE

Ale nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć matematycznego myślenia, bo to jest opłacalne – tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów.
I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę.

PYTANIE III

czy potrafilibyśmy tak uczyć?

NIE

Ale nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć matematycznego myślenia, bo to jest opłacalne – tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów. I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę.

Pewnie to nie będzie zaraz. Ale będzie, czego jestem tak pewien, jak tego, że swego czasu Pitagoras zapoczątkował istnienie dewiantów, zwanych matematykami (choć też przy tym nie byłem).

Wielościany

– kilka problemów

Wykazać,
że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.

Wykazać,
że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.

Jeśli wielościan ma choć jedną ścianę czworokątną
lub mającą jeszcze więcej boków,
to ma co najmniej osiem krawędzi,
bo z każdego wierzchołka tej ściany wychodzą co najmniej trzy krawędzie, z czego dwie do sąsiednich wierzchołków.

Zostały nam wielościany o wszystkich ścianach trójkątnych.
Jeśli tych ścian jest n, to krawędzi jest $3n/2$ (bo każda łączy dwie ściany), a taka liczba nie chce być równa 7.

Wykazać,
że istnieje wielościan o k krawędziach
dla każdego k większego do 7 i dla k równego 6.

Wykazać, że istnieje wielościan o k krawędziach dla każdego k większego do 7 i dla k równego 6.

Dla k parzystych taki jest np. ostrosłup o podstawie $(k/2)$-kątnej.

Jeśli natomiast obetniemy troszkę
jeden z wierzchołków przy podstawie,
to liczba krawędzi zwiększy się o 3,
a więc otrzymamy wszystkie liczby nieparzyste poczynając od 9.

Jakie są jeszcze ograniczenia na liczbę w – wierzchołków, s – ścian i k – krawędzi?

Jakie są jeszcze ograniczenia na liczbę w – wierzchołków, s – ścian i k – krawędzi?

Ponieważ dowolne trzy punkty leżą na jakiejś płaszczyźnie, więc $w \geq 4$. Ale wówczas również $s \geq 4$. O liczbie k już było.

Liczby te są związane jeszcze zależnościami $3s \leq 2k$ i $3w \leq 2k$, bo każda krawędź należy do dwóch ścian,

a ściany te są co najmniej trójkątne;

podobnie każda krawędź łączy dwa wierzchołki,

a z każdego z nich wychodzi ich co najmniej trzy.

I. Ściany, krawędzie, wierzchołki

Czy istnieje tylko jeden wielościan o danych w, s, k?

Czy istnieje tylko jeden wielościan o danych w, s, k?

Oczywiście nie.

Na przykład sześcian i czworościan z dwoma obciętymi rogami mają te same $w = 8$, $s = 6$, $k = 12$.

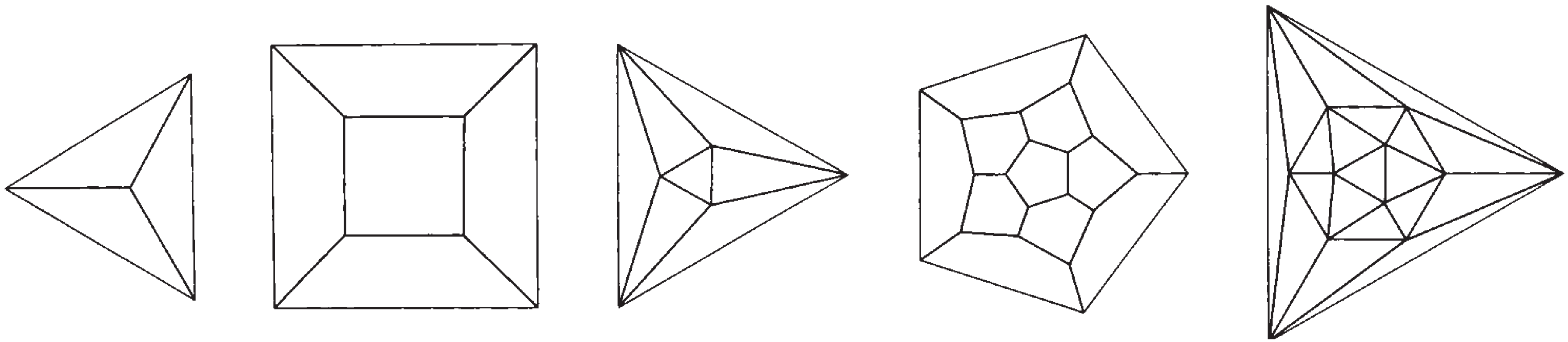
I. Ściany, krawędzie, wierzchołki

Dalej będziemy zajmowali się wielościanami wypukłymi.

Wielościan taki można określić w ten sposób,
że gdyby dowolna z jego ścian była przezroczysta,
to można byłoby tak zbliżyć do niej oko,
że przez nią widziałoby się wszystkie inne ściany.
Taki widok nazywa się *diagramem Schlegela*.

Dalej będziemy zajmowali się wielościanami wypukłymi.

Wielościan taki można określić w ten sposób,
że gdyby dowolna z jego ścian była przezroczysta,
to można byłoby tak zbliżyć do niej oko,
że przez nią widziałoby się wszystkie inne ściany.
Taki widok nazywa się *diagramem Schlegela*.



Tak wyglądają diagramy Schlegela dla wielościanów foremnych.

Udowodnić wzór Eulera: $w+s=k+2$.

Aby skorzystać z diagramu Schlegela musimy przyjąć następującą umowę:

to, co leży dokoła diagramu uznajemy też za jego ścianę

– trzeba tak zrobić, by diagram miał tyle ścian,
co wielościan, z którego powstał.

Udowodnić wzór Eulera: $w+s=k+2$.

Z diagramu Schlegela usuwamy krawędzie i wierzchołki, przestrzegając tego, by nie podzielić diagramu na rozłączne części: stale powinno być możliwe dotarcie po nieusuniętych jeszcze krawędziach do każdego z nieusuniętych dotąd wierzchołków.

A sposoby są dwa:

1. gdy po obu stronach krawędzi są różne ściany (na początku w diagramie każda z krawędzi ma tę własność) – usuwamy ją zostawiając kończące ją wierzchołki;
2. gdy krawędź kończy się wierzchołkiem, z którego nie wychodzi prócz niej żadna inna krawędź – usuwamy ją wraz z tym wierzchołkiem.

Udowodnić wzór Eulera: $w+s=k+2$.

W pierwszym przypadku zmniejsza się o jeden liczbę krawędzi i liczbę ścian. W drugim – o jeden liczbę krawędzi i liczbę wierzchołków. Zatem w obu przypadkach odejmujemy po jedynce od obu stron wzoru Eulera.
W ten sposób możemy po kolei usunąć wszystkie krawędzie, więc na końcu zostanie nam jeden wierzchołek i “otaczająca go” ściana.
A ponieważ $1+1=0+2$, więc wzór Eulera został udowodniony.

1. gdy po obu stronach krawędzi są różne ściany
(na początku w diagramie każda z krawędzi ma tę własność)
– usuwamy ją zostawiając kończące ją wierzchołki;
2. gdy krawędź kończy się wierzchołkiem,
z którego nie wychodzi prócz niej żadna inna krawędź
– usuwamy ją wraz z tym wierzchołkiem.

Za pomocą wzoru Eulera
można oszacować liczbę ścian i wierzchołków z drugiej strony.

Poprzednio stwierdziliśmy, że $3w \leq 2k$.

Wstawiając to do wzoru Eulera otrzymujemy
$\frac{2}{3}k + s \geq k + 2$, czyli $s \geq \frac{1}{3}k + 2$.

Podobnie $w \geq \frac{1}{3}k + 2$.

Zatem dla wielościanów wypukłych mamy

$$\frac{2}{3}k \geq w \geq \frac{1}{3}k + 2 \quad \text{i} \quad \frac{2}{3}k \geq s \geq \frac{1}{3}k + 2.$$

Przy odcinaniu wierzchołków, w których zbiegają się 3 krawędzie (robiliśmy to już parę razy)

– nazwijmy to operacją OD –

liczba krawędzi rośnie o 3, liczba wierzchołków o 2 (bo 3 przybyły, a jeden ubył) i liczba ścian o 1.

Przeciwna operacja: dobudowywanie na trójkątnej ścianie ostrosłupa (uzasadnij, że można to zrobić nie psując wypukłości!)

– operacja DO –

zwiększa liczbę krawędzi o 3, liczbę wierzchołków o 1 i liczbę ścian o 2 (znów 3 – 1).

Do wielościanu mającego w wierzchołków, s ścian i k krawędzi udało się zastosować m operacji OD **i n operacji** DO.

Ile teraz ma on wierzchołków, ścian i krawędzi?

Do wielościanu mającego *w* wierzchołków, *s* ścian i *k* krawędzi udało się zastosować *m* operacji OD **i *n* operacji** DO.

Ile teraz ma on wierzchołków, ścian i krawędzi?

Prosty rachunek daje

$$w' = w + 2m + n, \quad s' = s + m + 2n, \quad k' = k + 3m + 3n.$$

Udowodnić twierdzenie Steinitza: jeśli liczby w, s, k spełniają warunki $w+s=k+2$, $3w \leq 2k$ i $3s \leq 2k$, to istnieje wielościan mający w wierzchołków, s ścian i k krawędzi.

Udowodnić twierdzenie Steinitza: jeśli liczby w, s, k spełniają warunki $w+s=k+2$, $3w \le 2k$ i $3s \le 2k$, to istnieje wielościan mający w wierzchołków, s ścian i k krawędzi.

Dla dowodu wygodnie będzie przyjąć, że $k = 3q - r$,
gdzie r to 0, 1 lub 2.

Z uzyskanych nierówności mamy $w \ge q + 2 - \frac{1}{3}r$ i $s \ge q + 2 - \frac{1}{3}r$.

Zatem (ponieważ $\frac{1}{3}r < 1$) mamy $w \ge q + 2$ i $s \ge q + 2$, z czego wynika, że liczby $m = w - q - 2$ i $n = s - q - 2$ są nieujemne i nadają się na krotności operacji OD i DO.

Tę zależność można zapisać inaczej: $w = m + q + 2$ i $s = n + q + 2$.

Z wzoru Eulera mamy więc
$m + q + 2 + n + q + 2 = 3q - r + 2$, czyli $q = (2 + r) + m + n$.

Podstawiając to zamiast q otrzymujemy
$w = (4 + r) + 2m + n$, $s = (4 + r) + m + 2n$ i $k = (6 + 2r) + 3m + 3n$.

Stąd twierdzenie będzie dowiedzione, gdy wskażemy wielościan, w którym $w = s = 4 + r$ i $k = 6 + 2r$.

Ale taki jest ostrosłup o podstawie trój-, czworo- lub pięciokątnej. Są w każdym z nich ściany trójkątne (to te boczne) i wierzchołki trójścienne (przy podstawie), więc można stosować OD i DO.

Twierdzenie Steinitza inaczej:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniał wielościan mający w wierzchołków i s ścian, są nierówności $w \leq 2s-4$ i $s \leq 2w-4$.

Oczywiście, należy to twierdzenie sprowadzić do poprzedniego, a w tym celu wystarczy porachować, że – gdy jest spełniony wzór Eulera – nierówności w sformułowaniu tego twierdzenia są równoważne tym z oryginalnego twierdzenia Steinitza.

Można jeszcze zapytać

ile jest wielościanów mających daną liczbę ścian i wierzchołków (a więc także krawędzi)?

Można jeszcze zapytać

ile jest wielościanów mających daną liczbę ścian i wierzchołków (a więc także krawędzi)?

Oto początek odpowiedzi

	wierzchołki										
ściany	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	1										
5		1	1								
6		1	2	2	2						
7			2	8	11	8	5				
8			2	11	42	74	76	38	14		
9				8	74	296	633	768	558	219	50

I. Ściany, krawędzie, wierzchołki

Bardzo polecam odnalezienie poszczególnych wielościanów wypukłych, choćby tych siedmiu, co mają po 6 ścian.

A poza tym odważni mogą tabelkę przedłużyć:

wielościanów o dziesięciu ścianach jest 31 538,

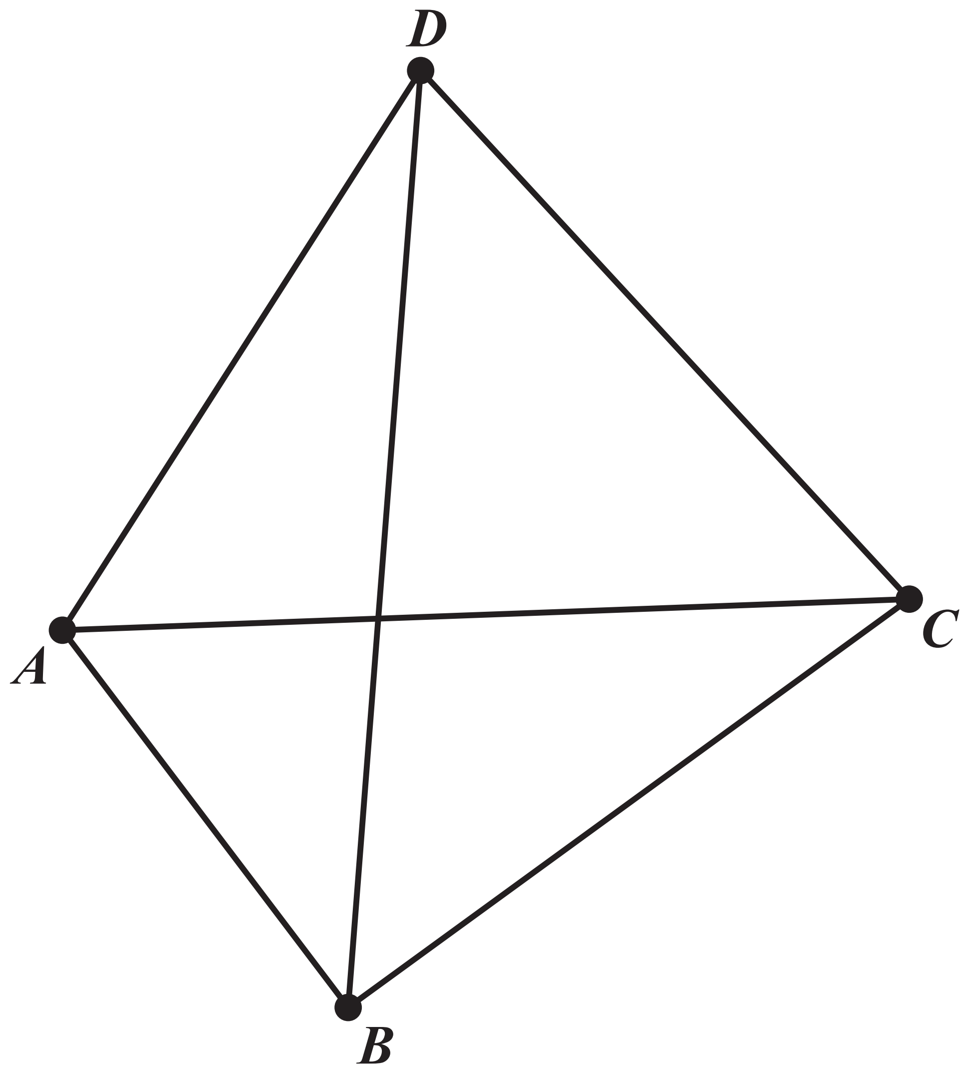
o jedenastu 435 641,

a tych o dwunastu ścianach ponad 5 milionów.

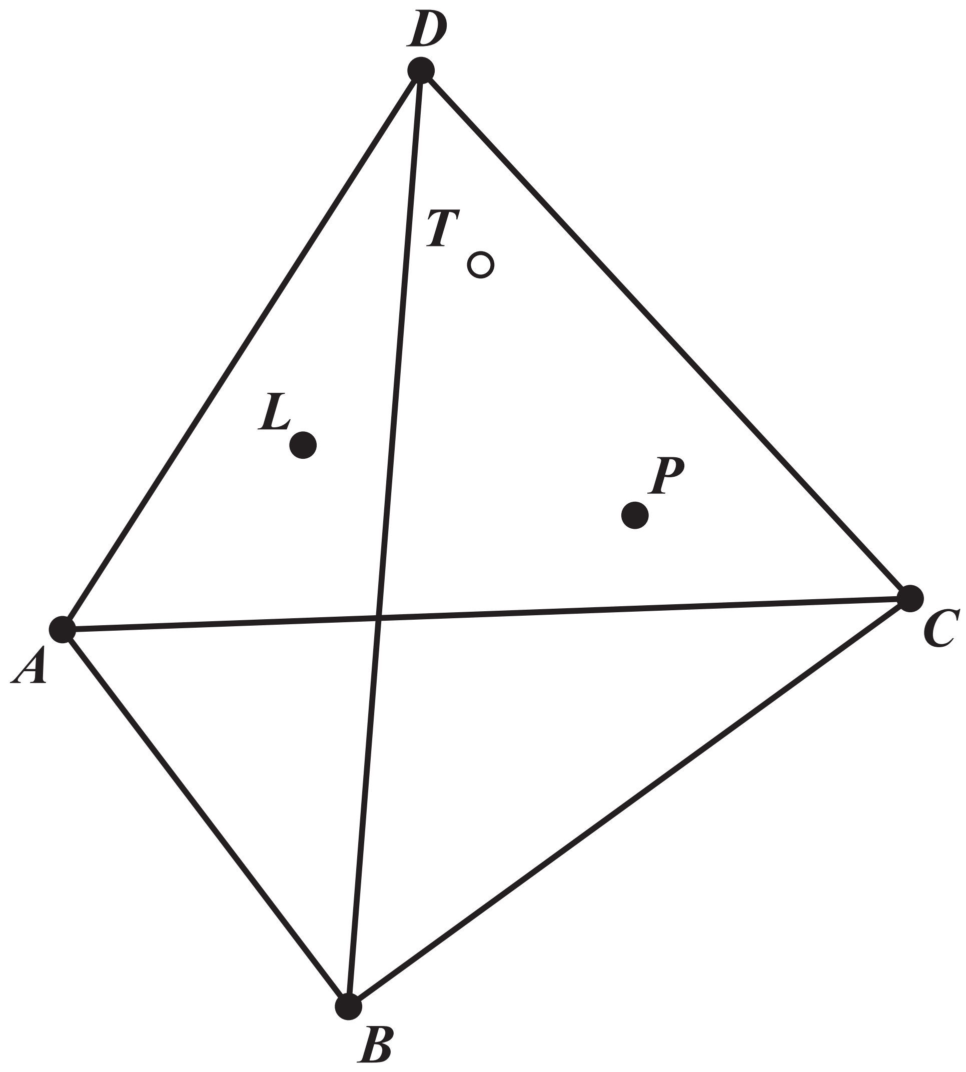
A teraz bajka

Były sobie punkty trzy $\ldots$

Dawno, dawno temu był sobie czworościan $ABCD$,

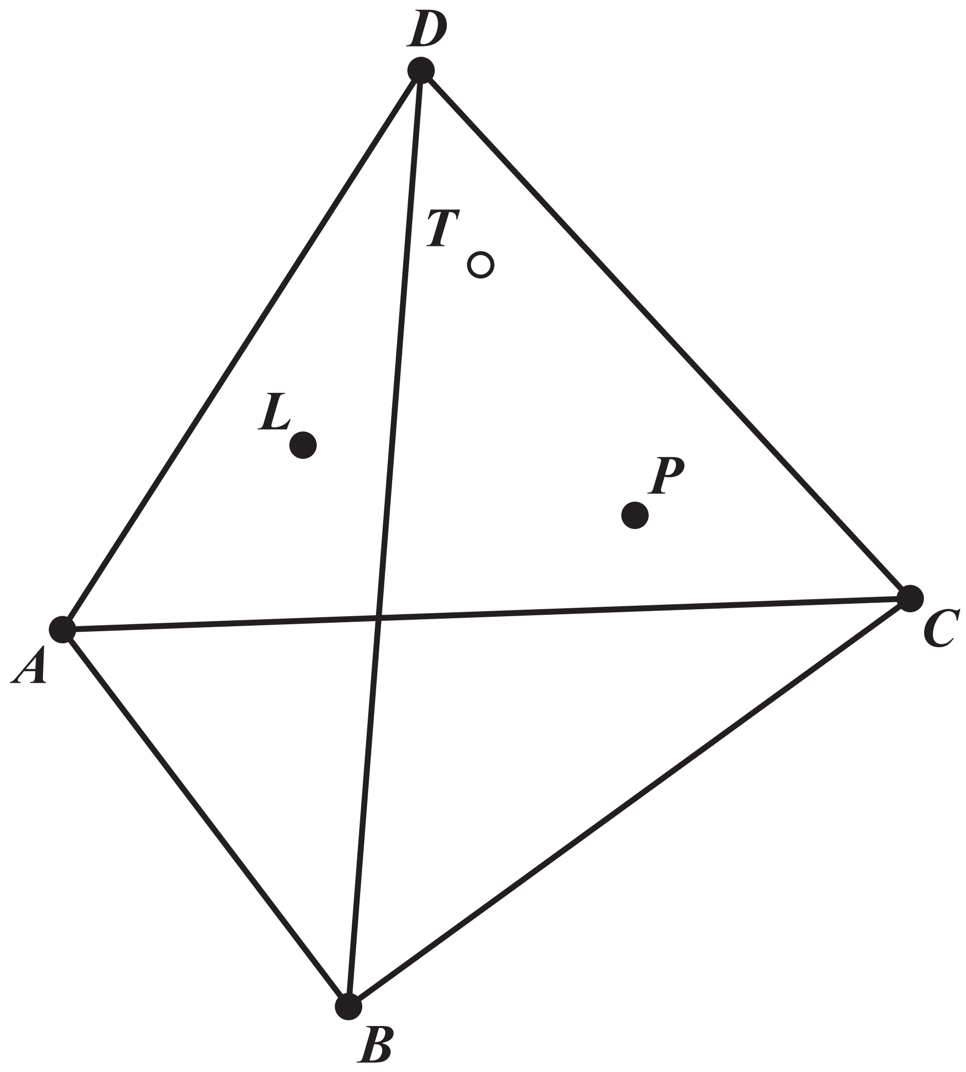


na którym zamieszkały trzy punkty:



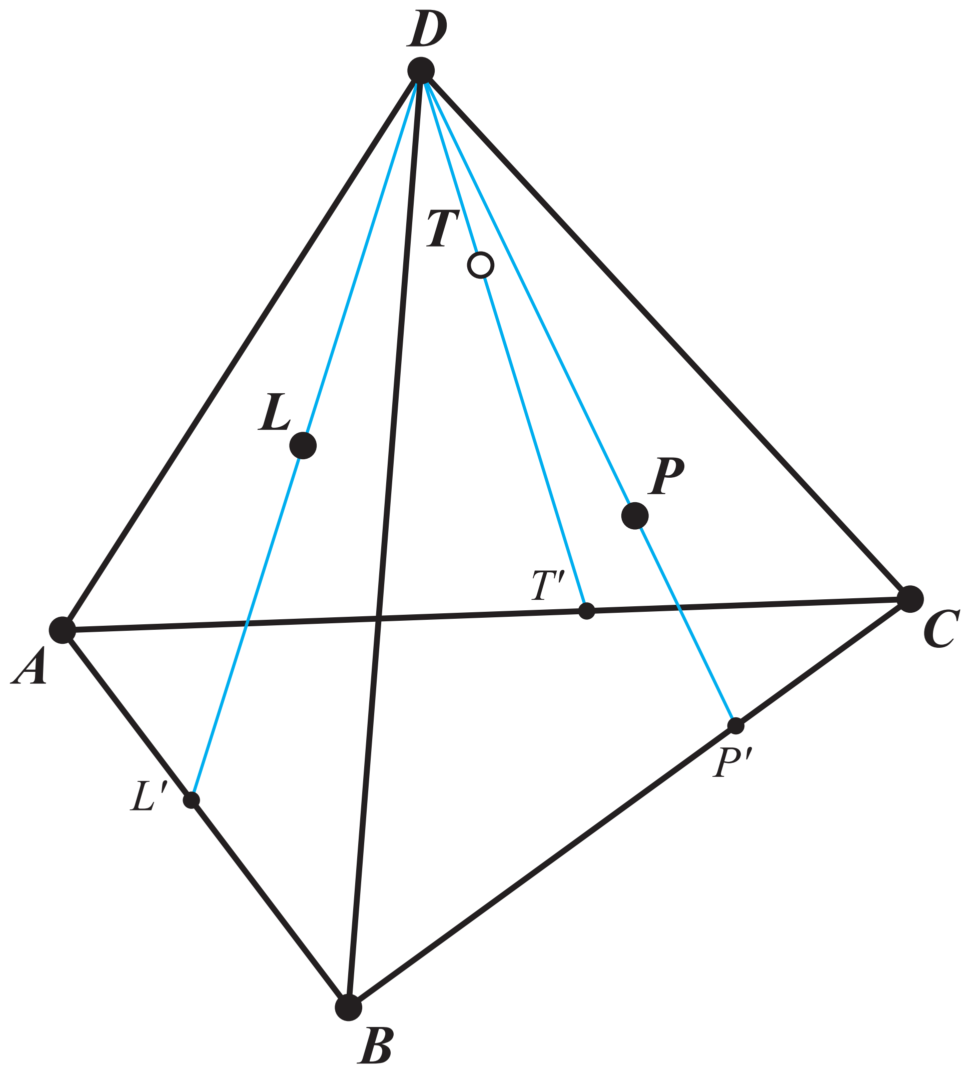
na lewej ścianie L, na prawej ścianie P, a T na ścianie tylnej.

Babcia im opowiadała, że gdy dorosną stworzą płaszczyznę,

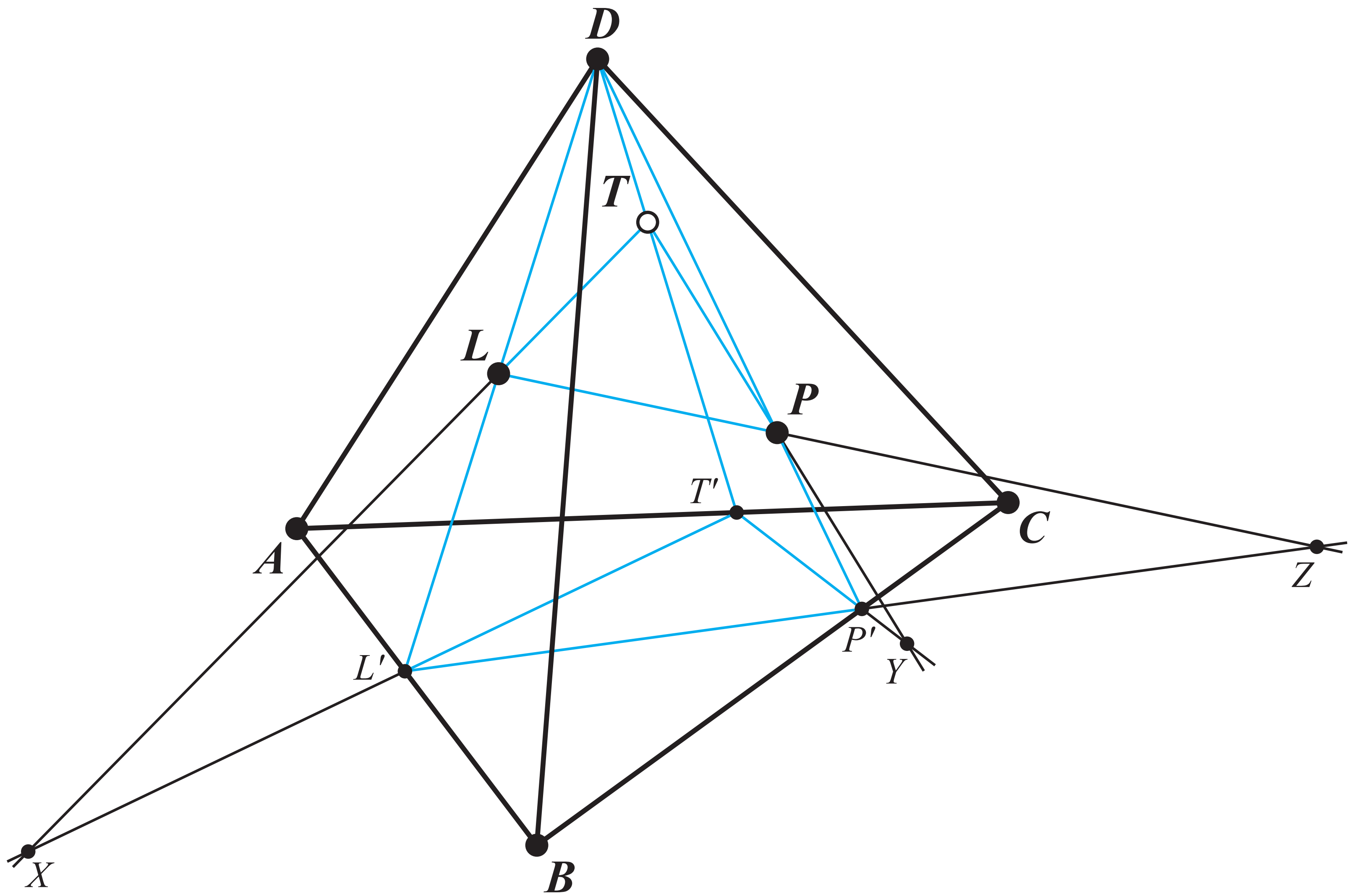


więc chciały zobaczyć, jak ta ich płaszczyzna przecięłaby czworościan.

Ale nie mogły wymyślić, jak to zbadać,

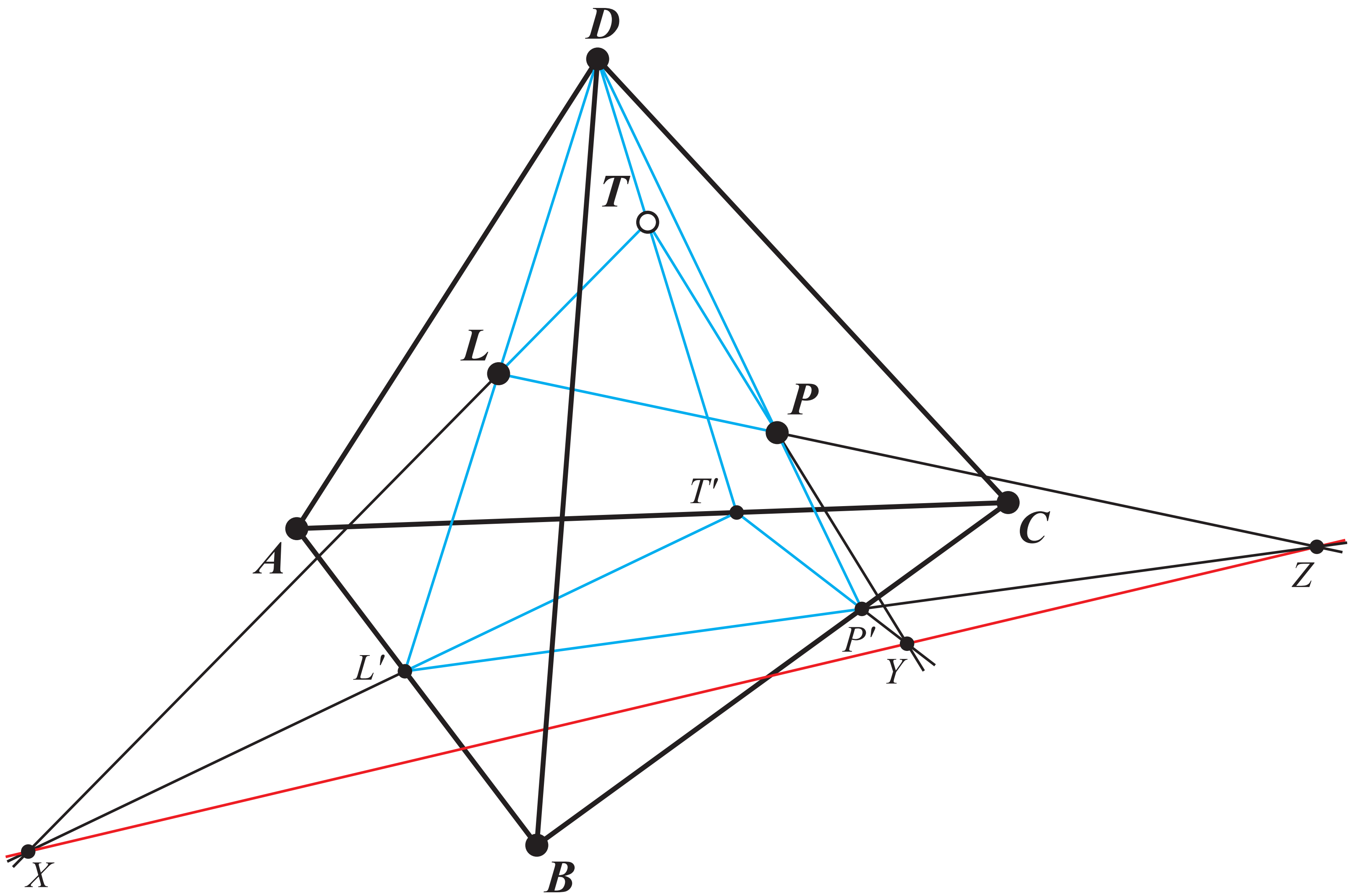


więc z rozpaczy zsunęły się po ścianie na podstawę i w parach zbadały, co mają wspólnego ich położenia przed



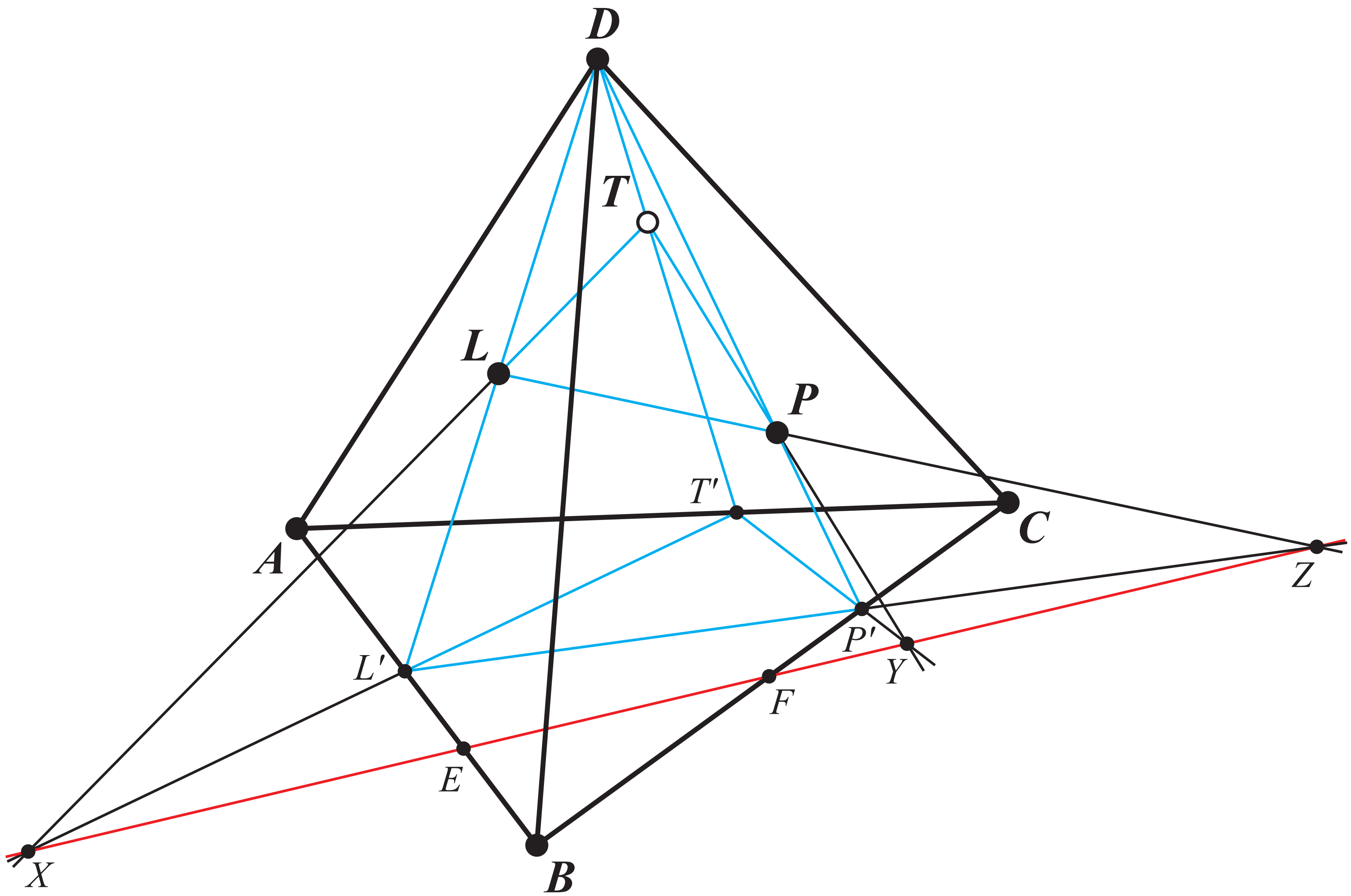
i po zsunięciu – tak powstały punkty X, Y i Z.

Ku ich zdumieniu, okazało się, że leżą one na jednej prostej.



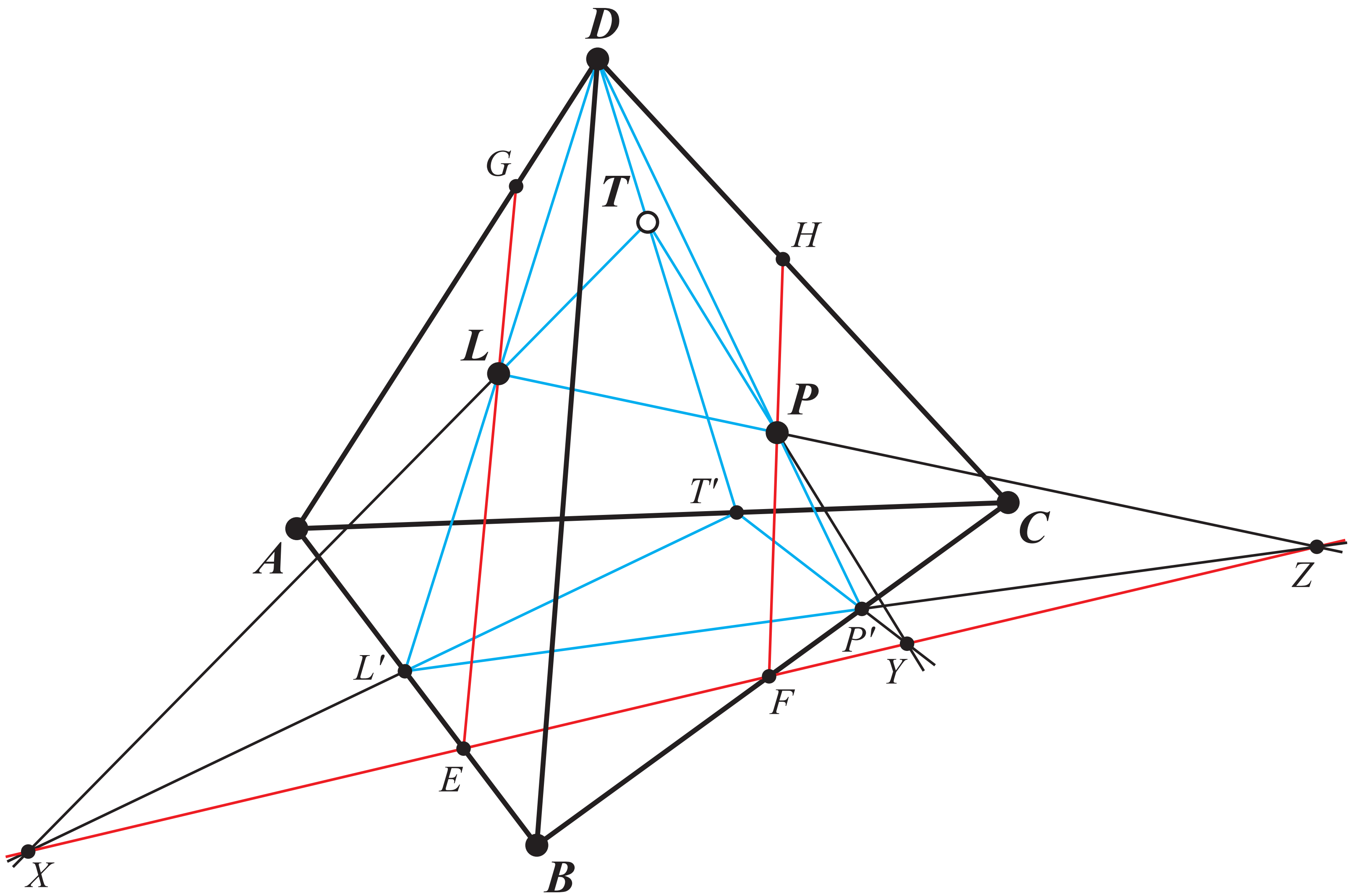
Czy tak musiało być?

Prosta XYZ przecięła podstawę w punktach E i F



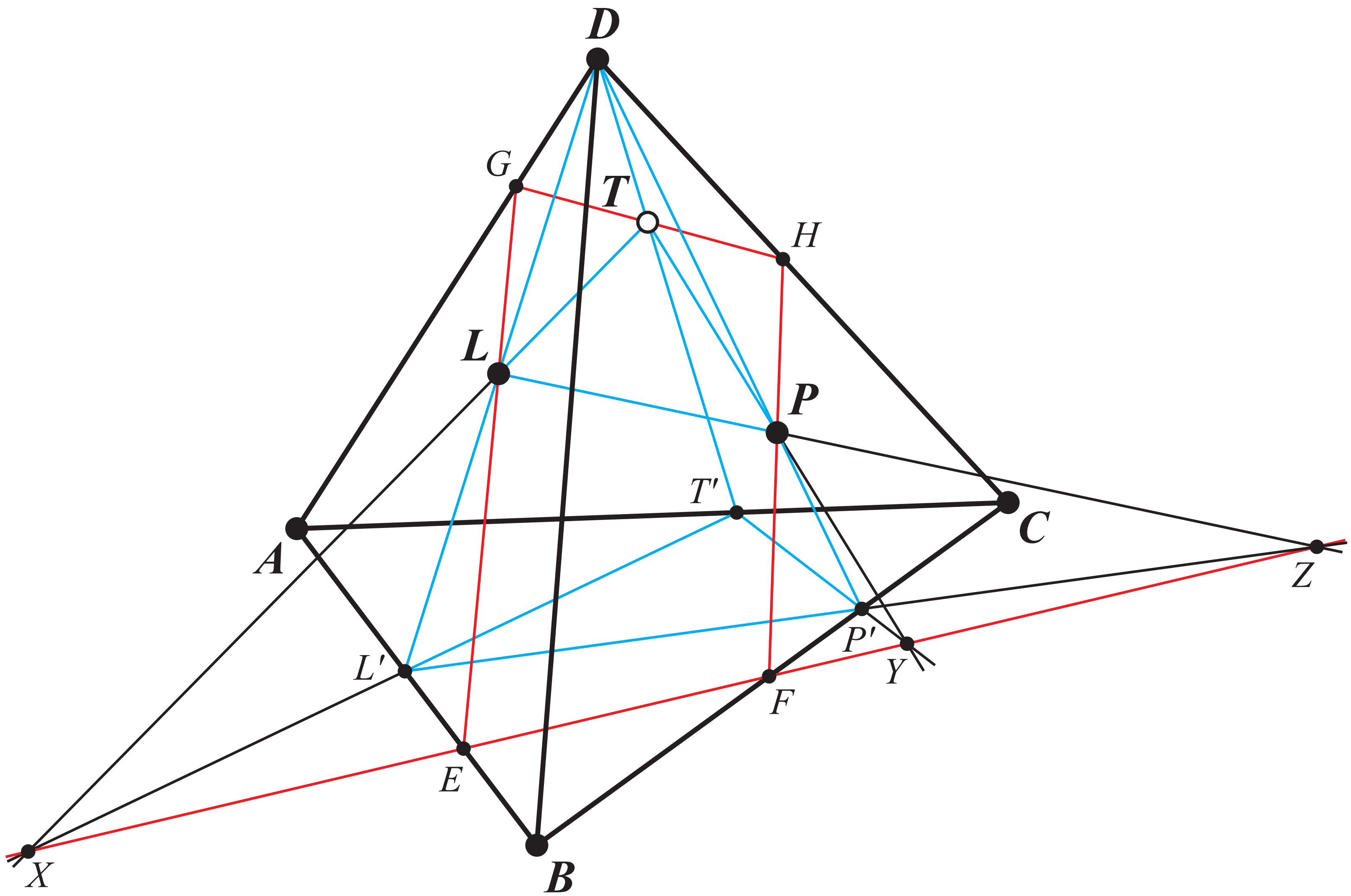
chociaż nie musiała!

Ale skoro punkty E i F się znalazły



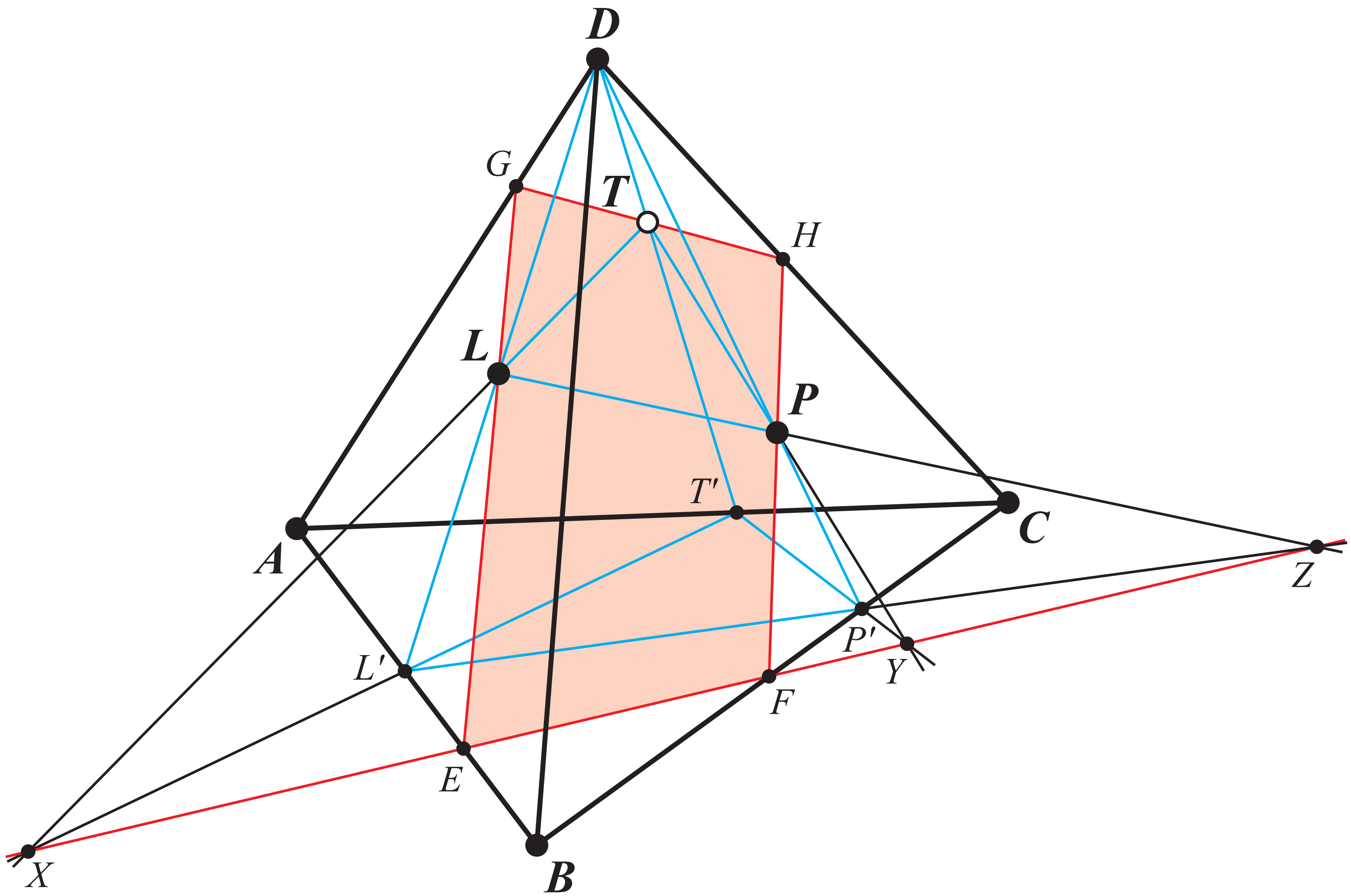
można je połączyć, odpowiednio, z L i P – po co?

I okazało się, że T oraz uzyskane punkty G i H



leżą na jednej prostej (znów: przypadek, czy konieczność?).

I tak przecięcie czworościanu $ABCD$ płaszczyzną LPT



zostało znalezione!

UWAGA I

Warto zwrócić uwagę na to, jakie własności prostych i płaszczyzn były potrzebne, by znaleźć to przecięcie.

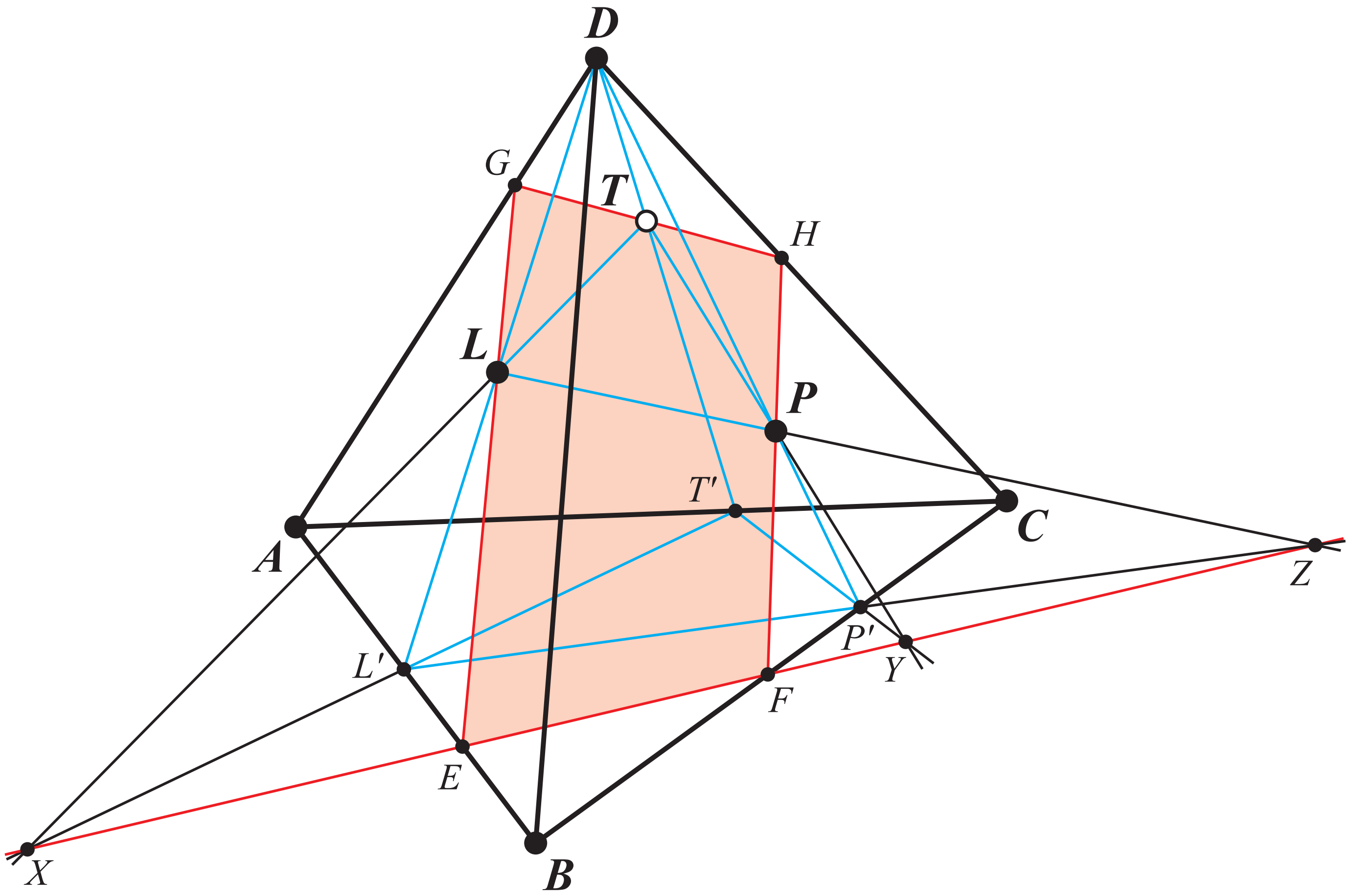
Dwie nierównoległe proste przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na jednej płaszczyźnie.

Dwie nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej.

I już!

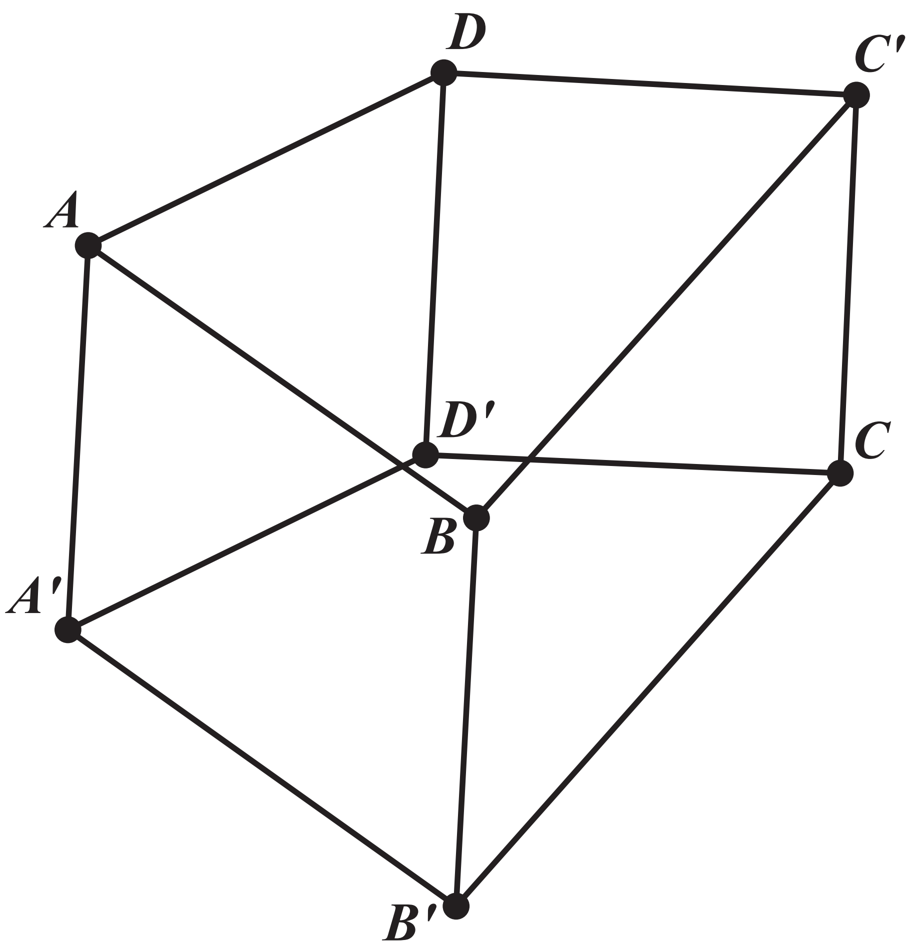
UWAGA II

Można było konstrukcję poprowadzić oszczędniej,



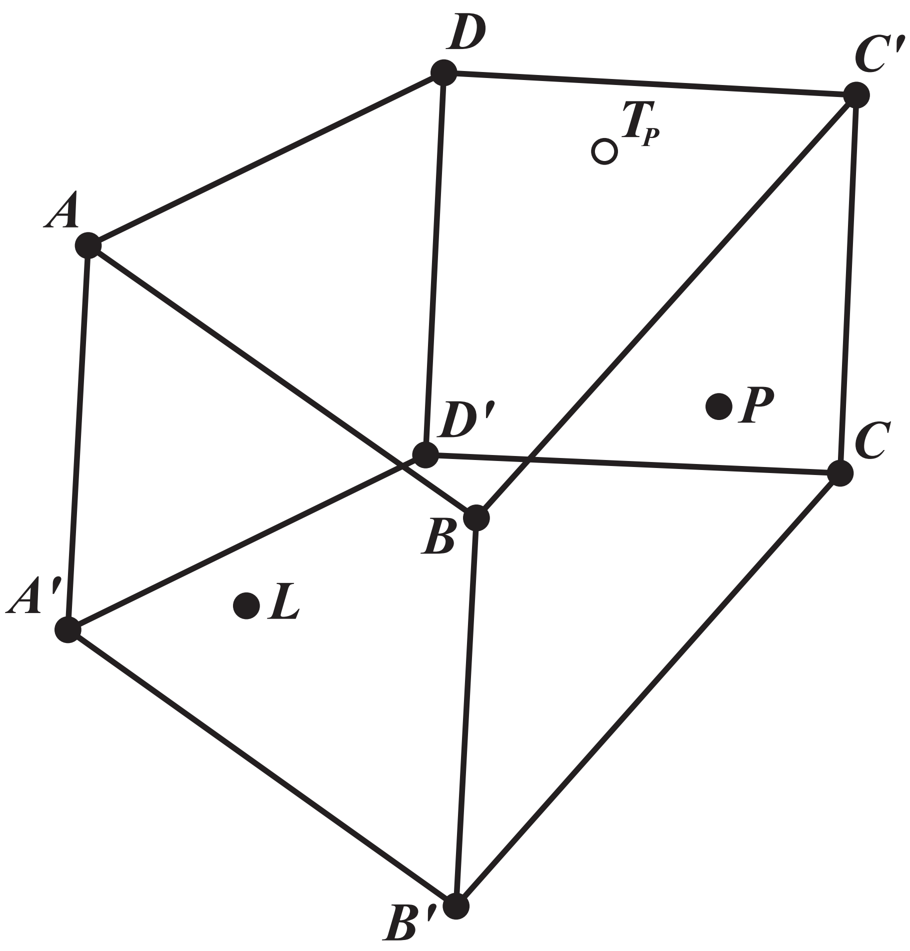
np. niepotrzebne były punkty Z i F.

Przećwiczmy to jeszcze raz



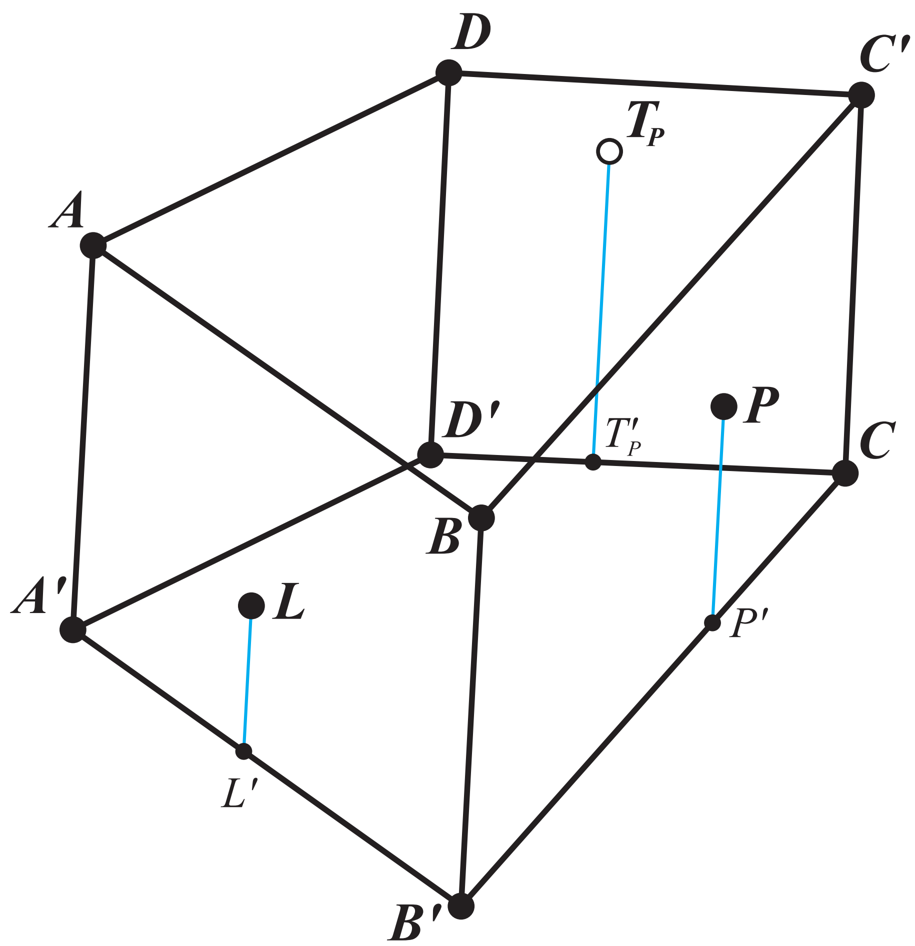
na dość nieregularnym graniastosłupie czworokątnym.

Zaprośmy punkty trzy



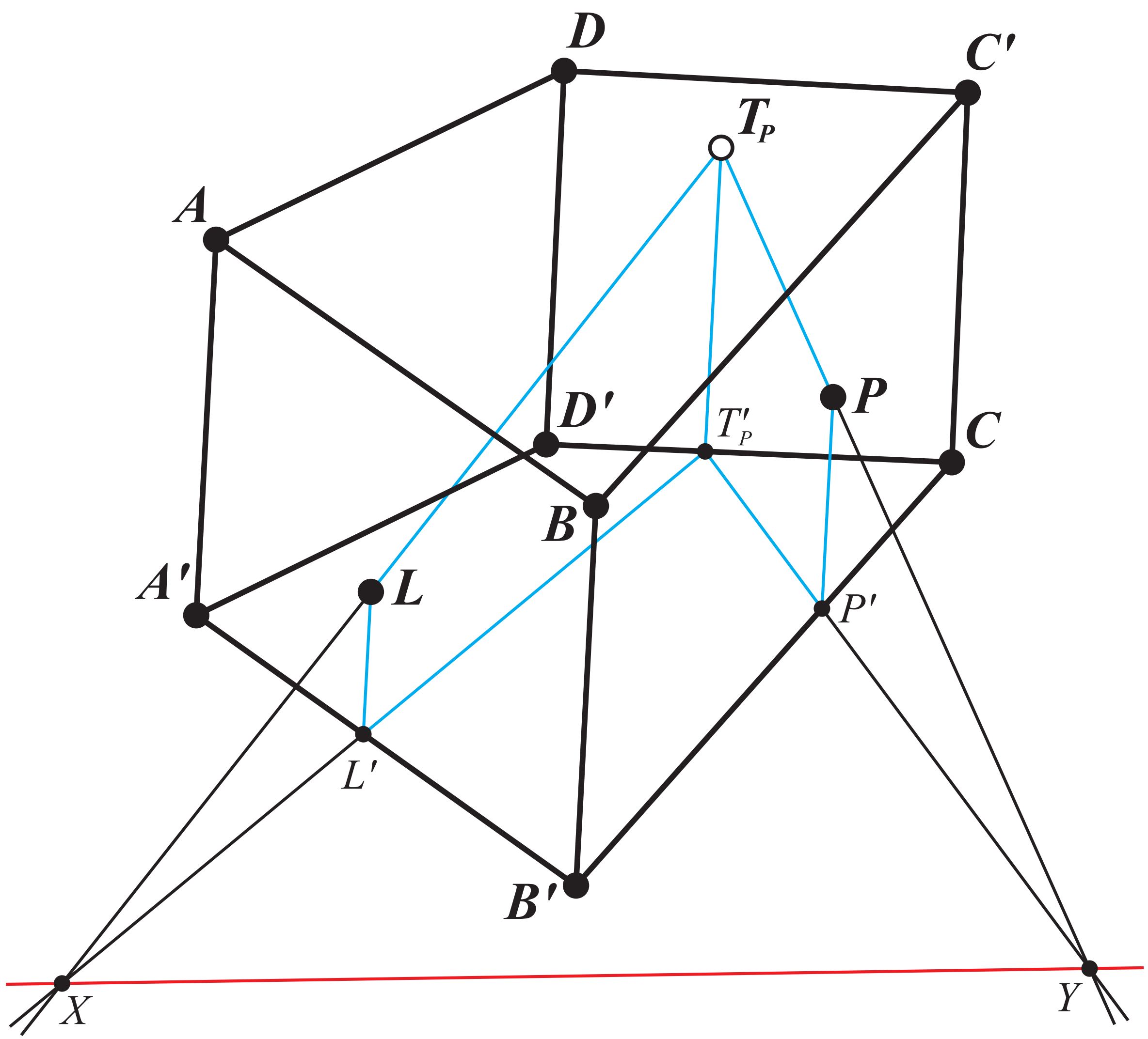
– L i P jak poprzednio, T_p na tylnej prawej.

Spadamy na dolną podstawę



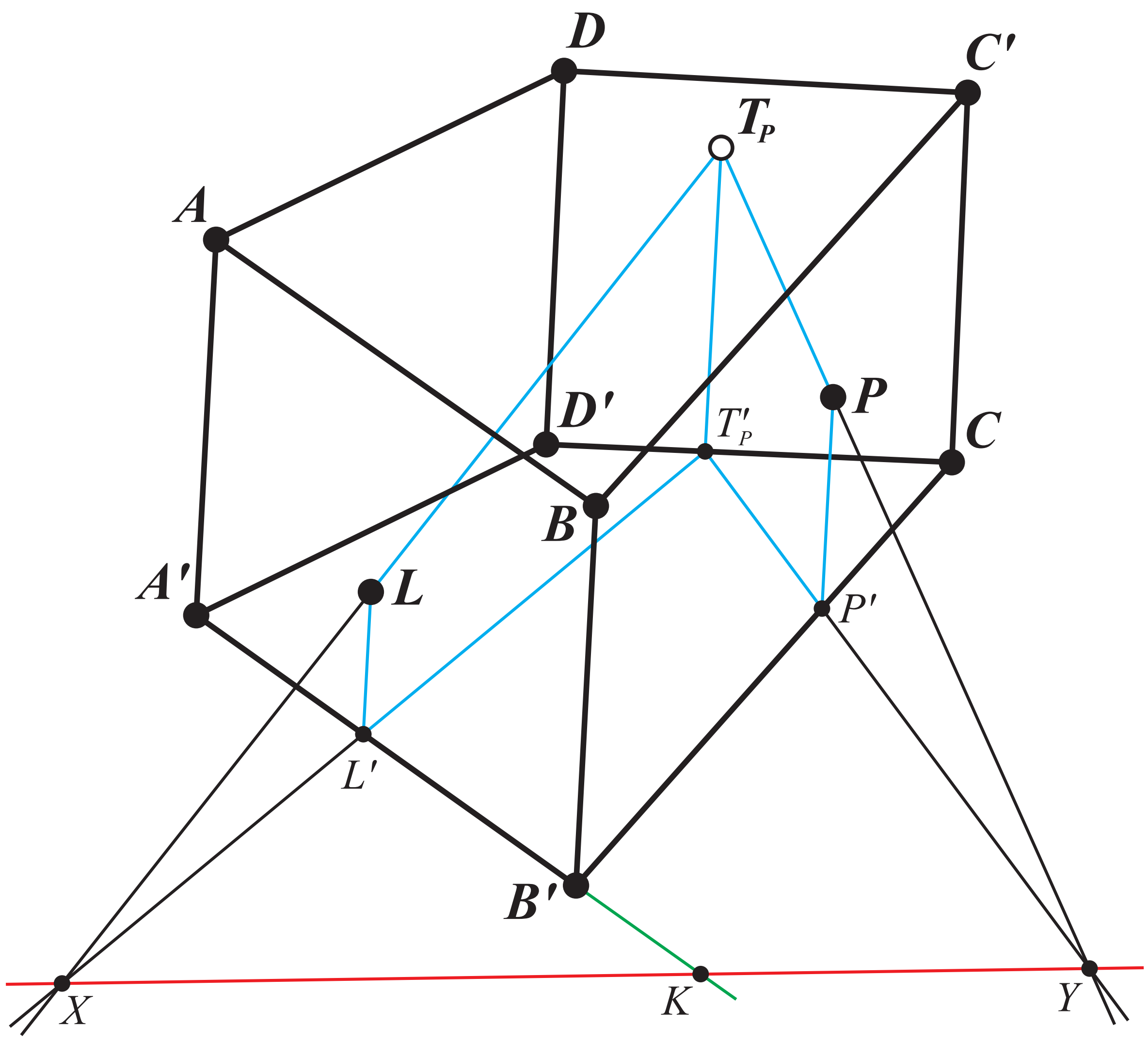
równolegle do AA' (nie wiemy, czy jest prostopadła do podstawy!).

Znajdujemy punkty X i Y



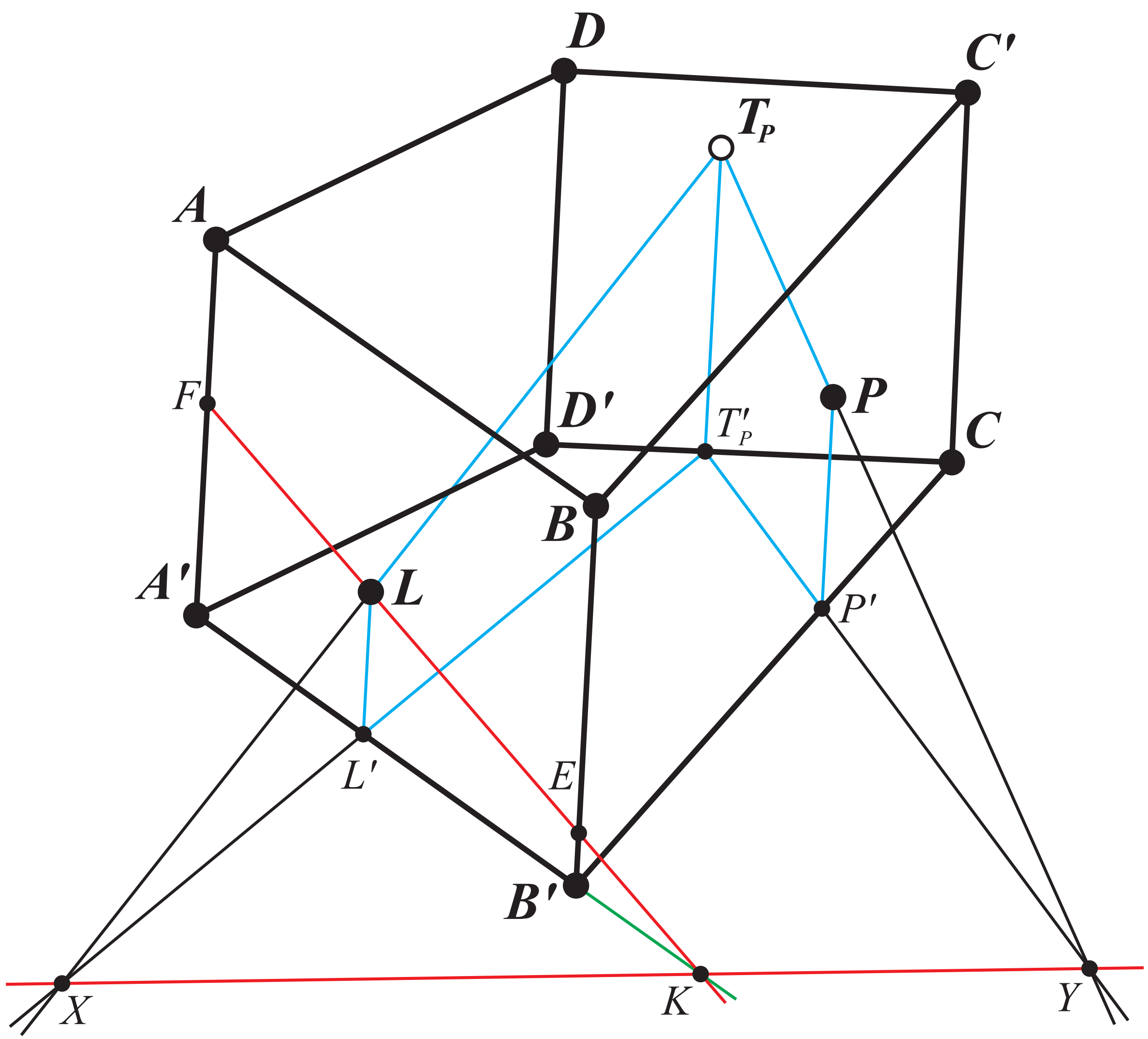
– tym razem XY nie przecina podstawy!

Ale przecież zamiast przecięcia z krawędzią



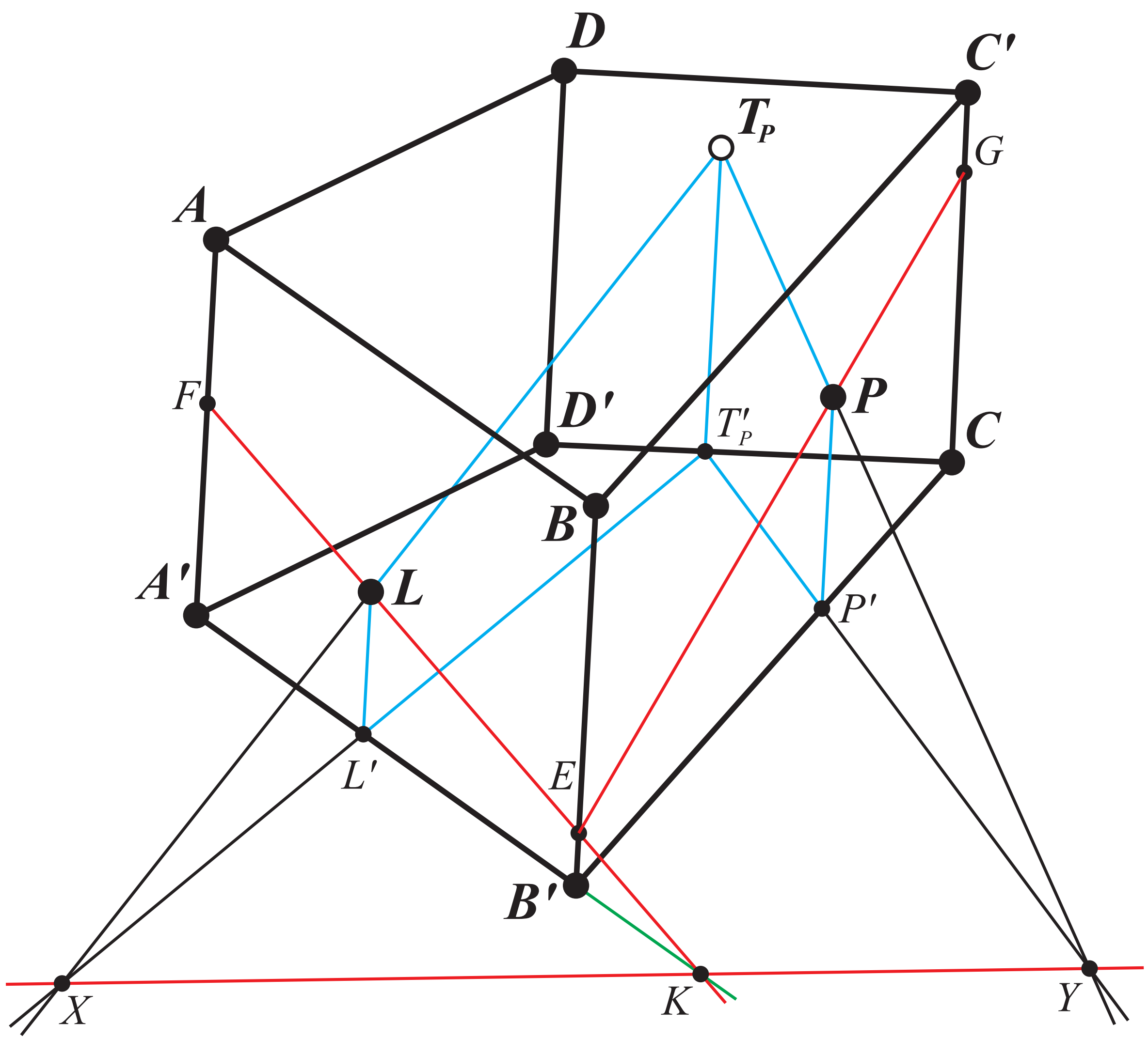
można użyć przecięcia z jej przedłużeniem.

Łącząc K z L



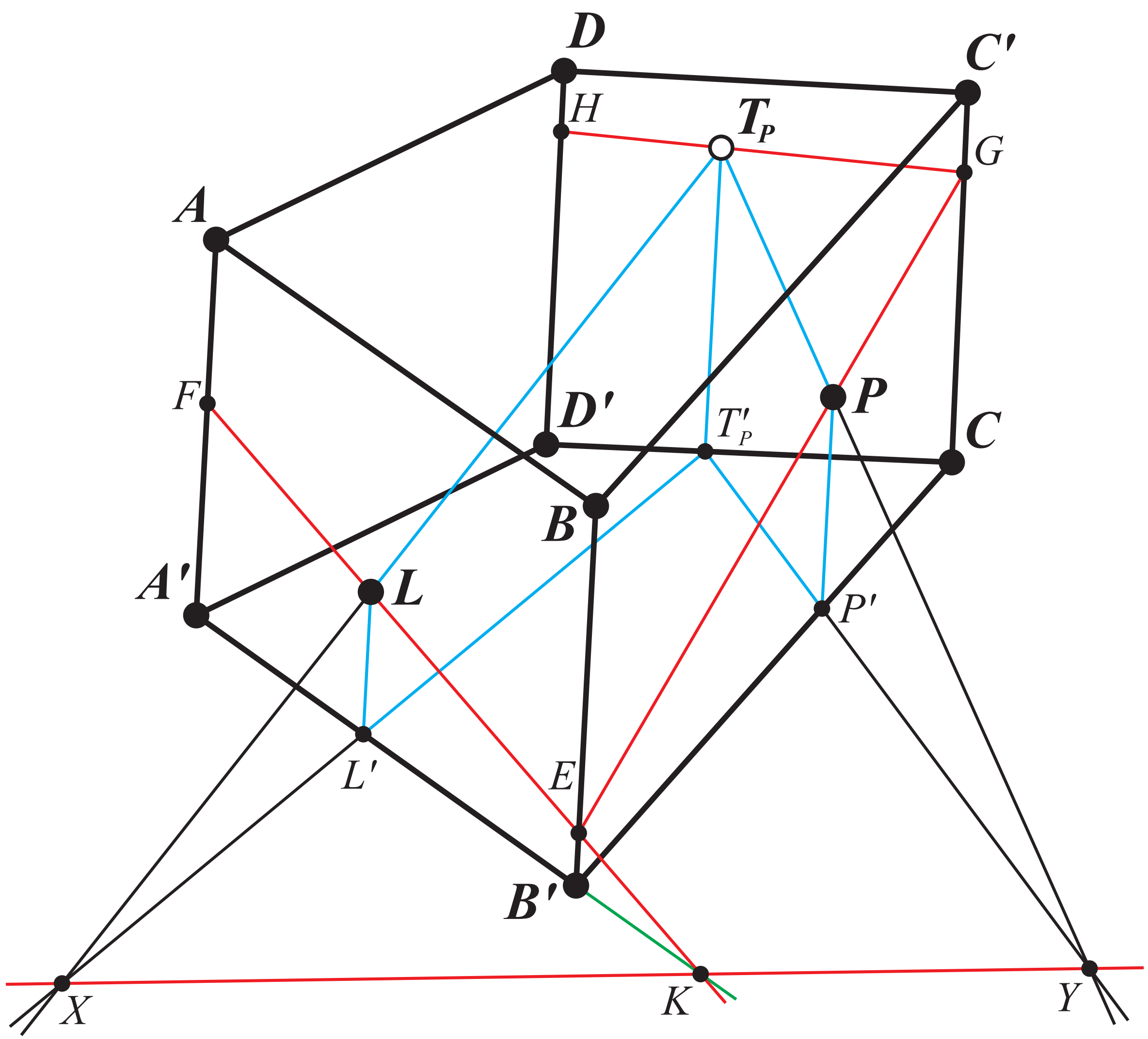
otrzymujemy pierwszą krawędź przekroju – EF.

Łącząc E z P



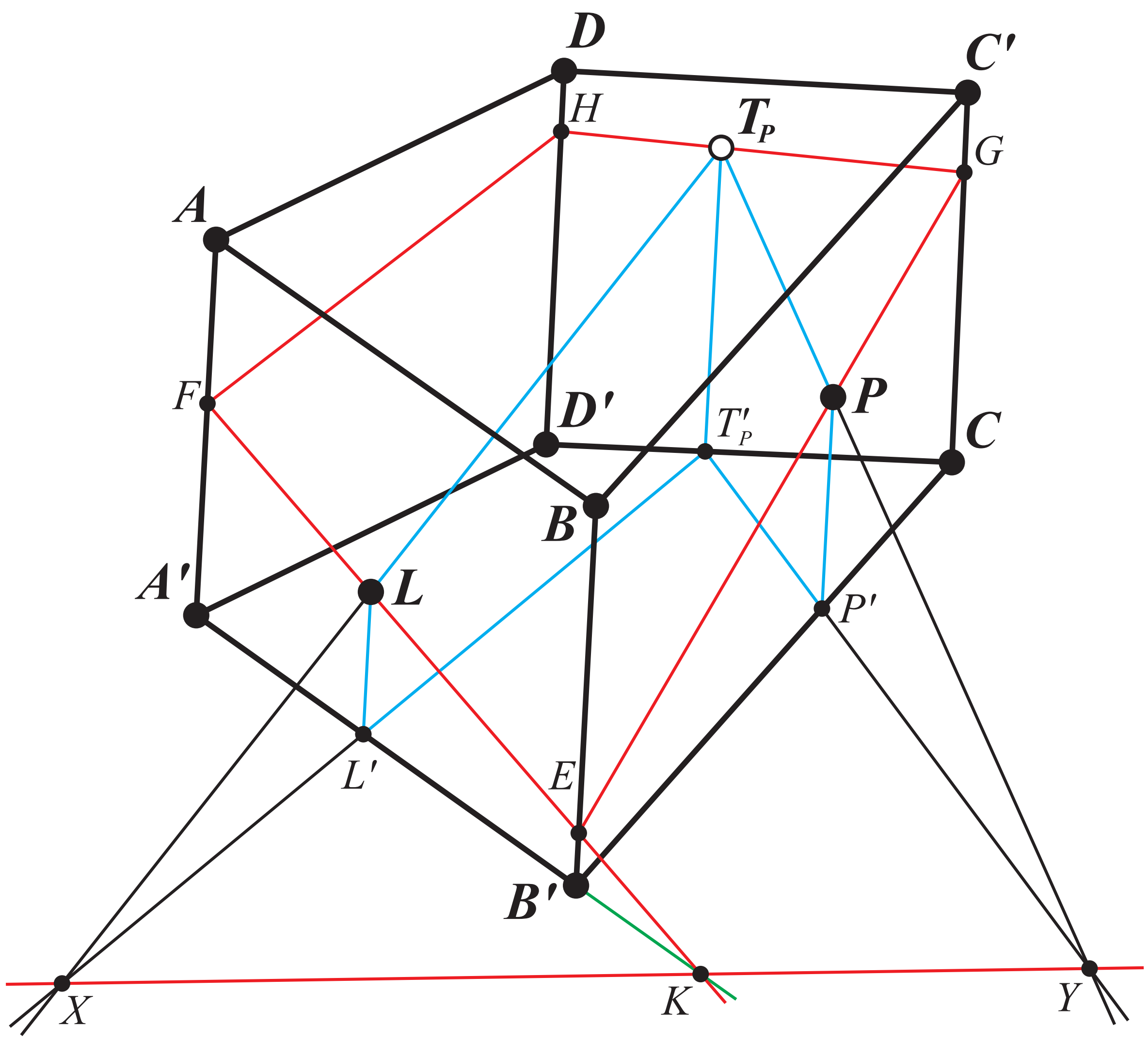
otrzymujemy drugą – EG,

i dalej, łącząc G z T_p



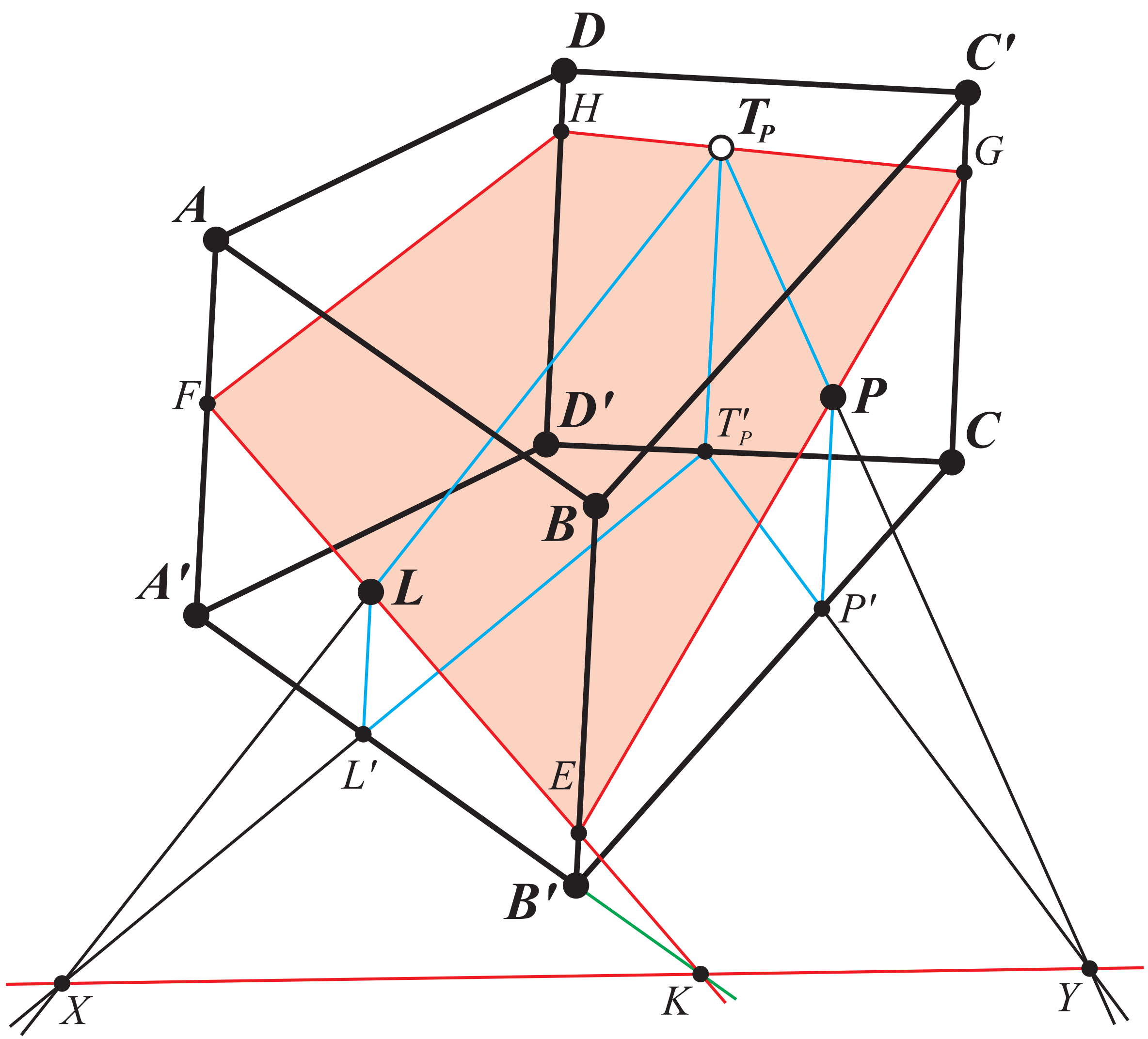
otrzymujemy GH.

Ponieważ F i H leżą na jednej ścianie,



więc i łączący je odcinek,

Co kończy szukanie przekroju,

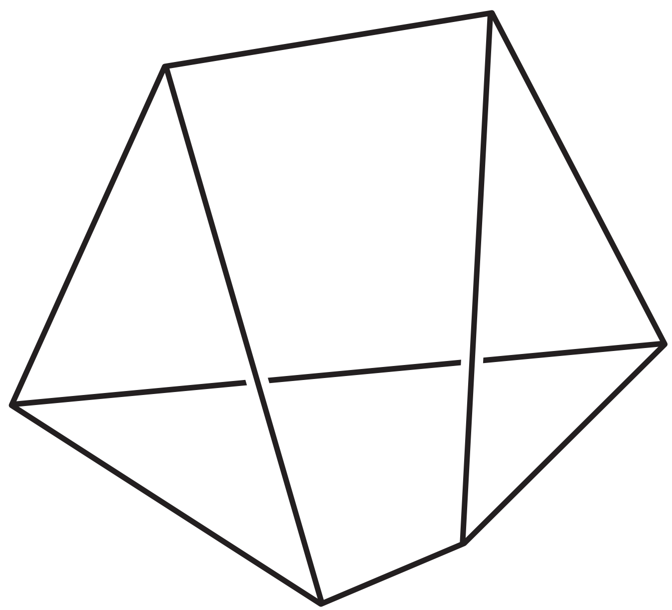


okazał się on też czworokątem (a były inne możliwości?).

Wbrew pozorom szukanie przekrojów przez dane trzy punkty jest zadaniem trudnym, o czym należy przekonać się samemu, np. dając takie zadanie swemu wybitnie zdolnemu koledze.

Powstaje pytanie, czy koniecznie trzeba to ćwiczyć jedynie na ostrosłupach i graniastosłupach
(i dodajmy: wielościanach foremnych).

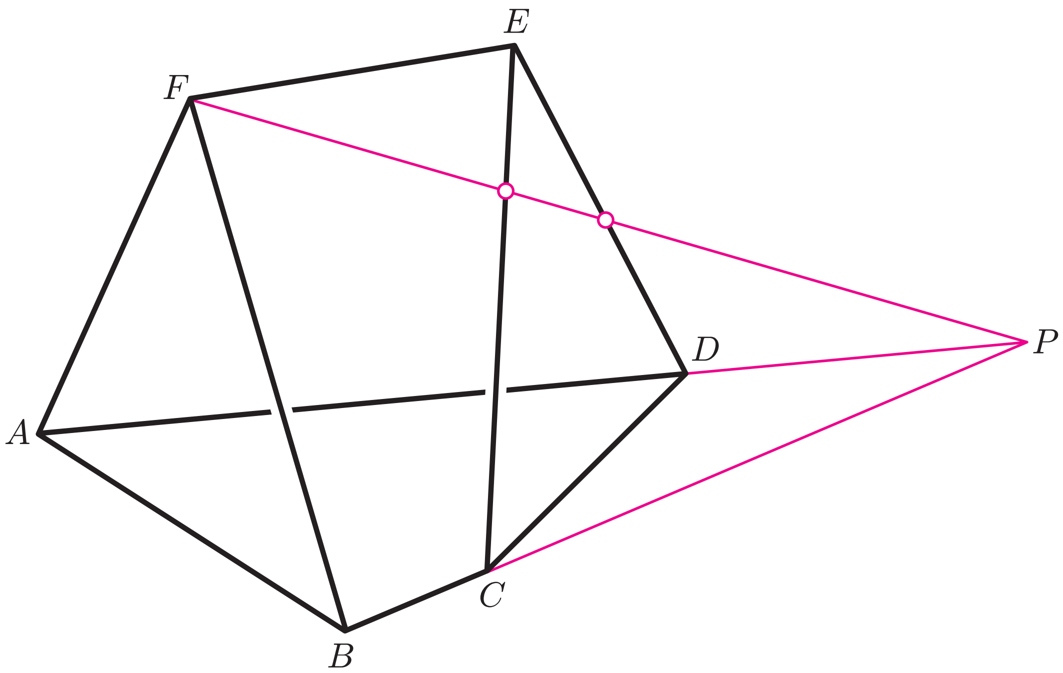
Okazuje się, że tak. A oto powód:



Okazuje się bowiem, że

rysunek krawędziowy przedstawia wielościany tylko wyjątkowo

– podany przykład wielościanu nie przedstawia.

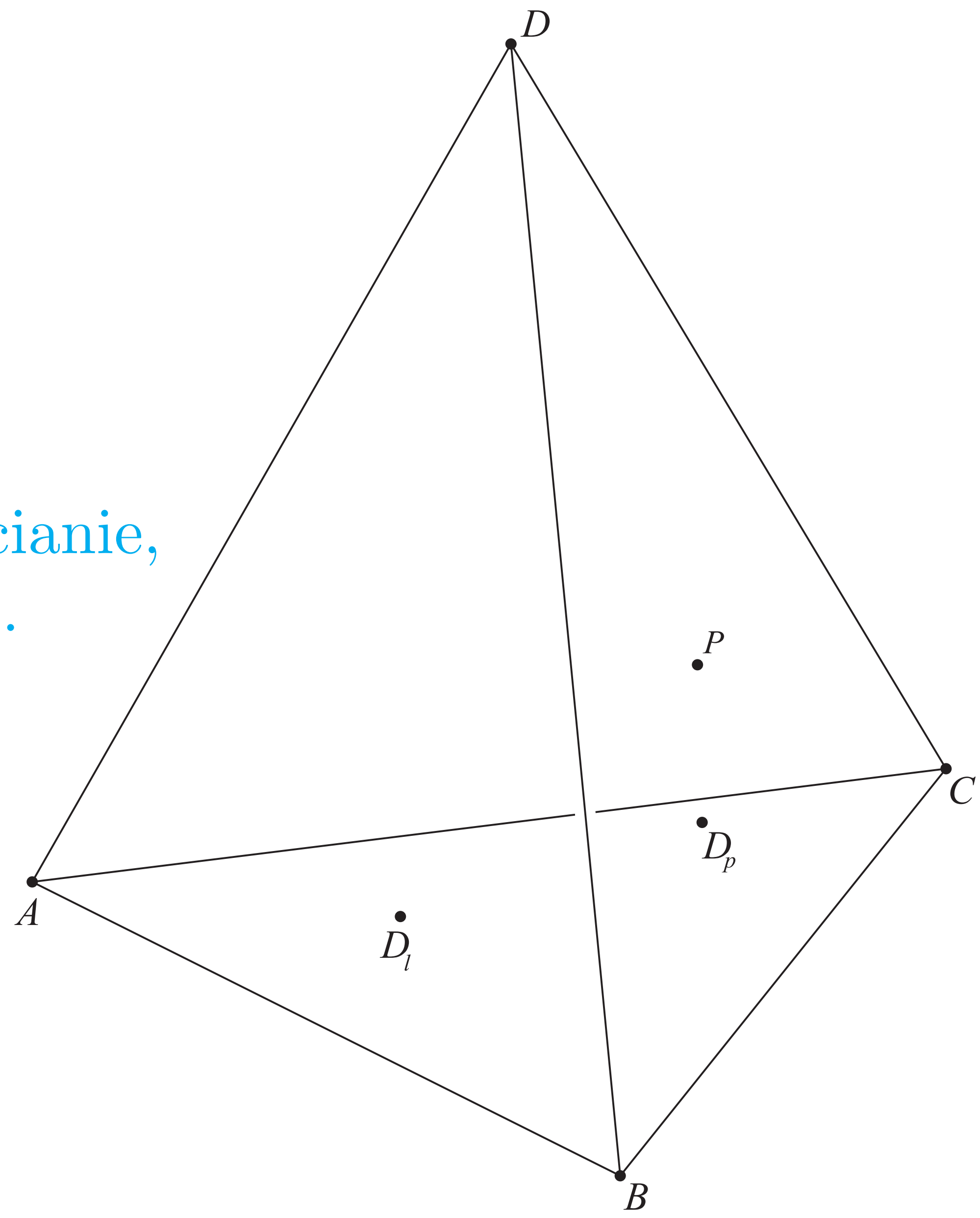


Jak widać nasza lista zasad zachowania się płaszczyzn
nie była kompletna – brakowało, na przykład, stwierdzenia

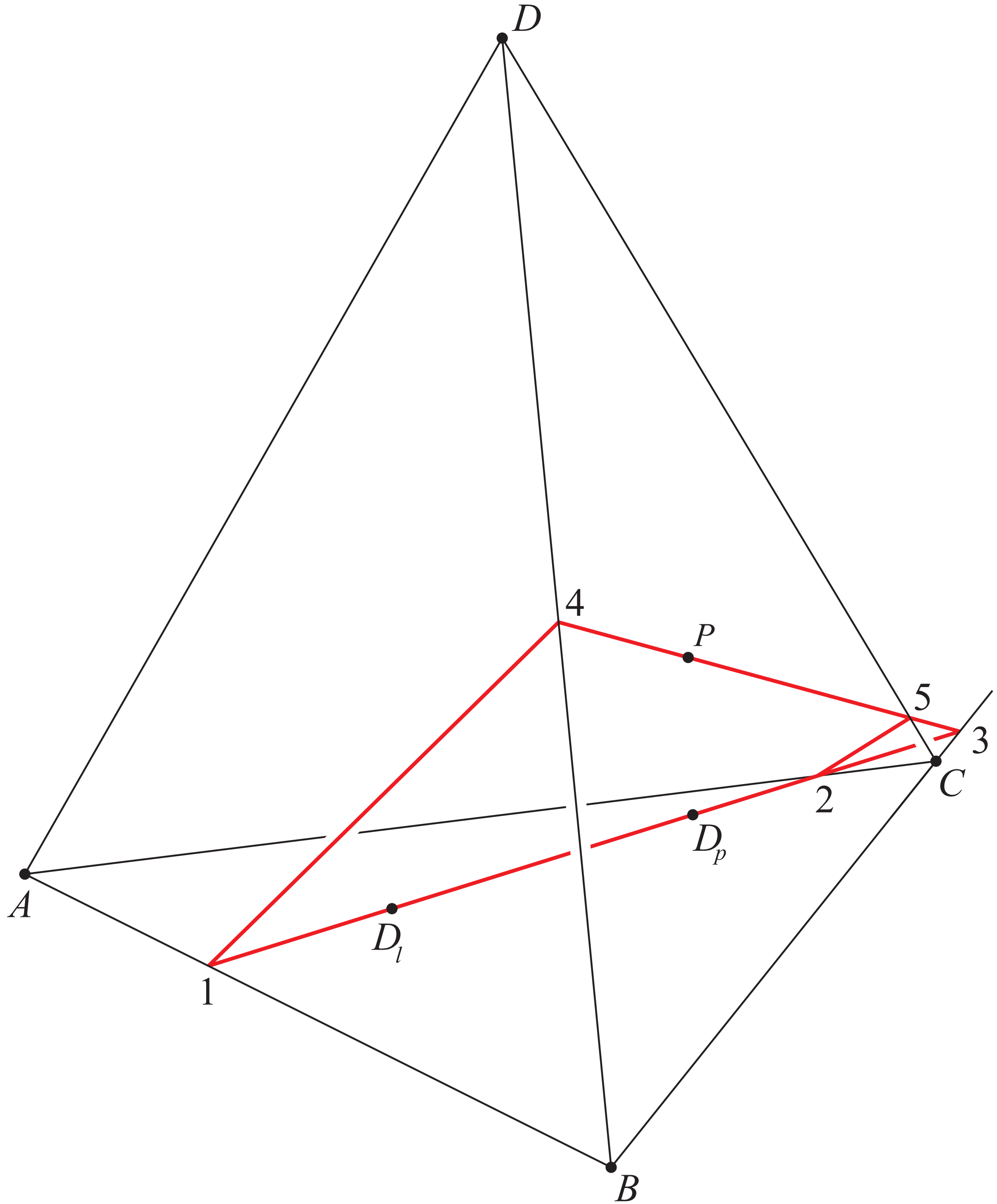
Przecięcie trzech płaszczyzn to albo zbiór pusty, albo jeden punkt, albo prosta, albo płaszczyzna.

To teraz spróbujmy razem narysować ilustrację dla bajki, w której występują te trzy punkty:

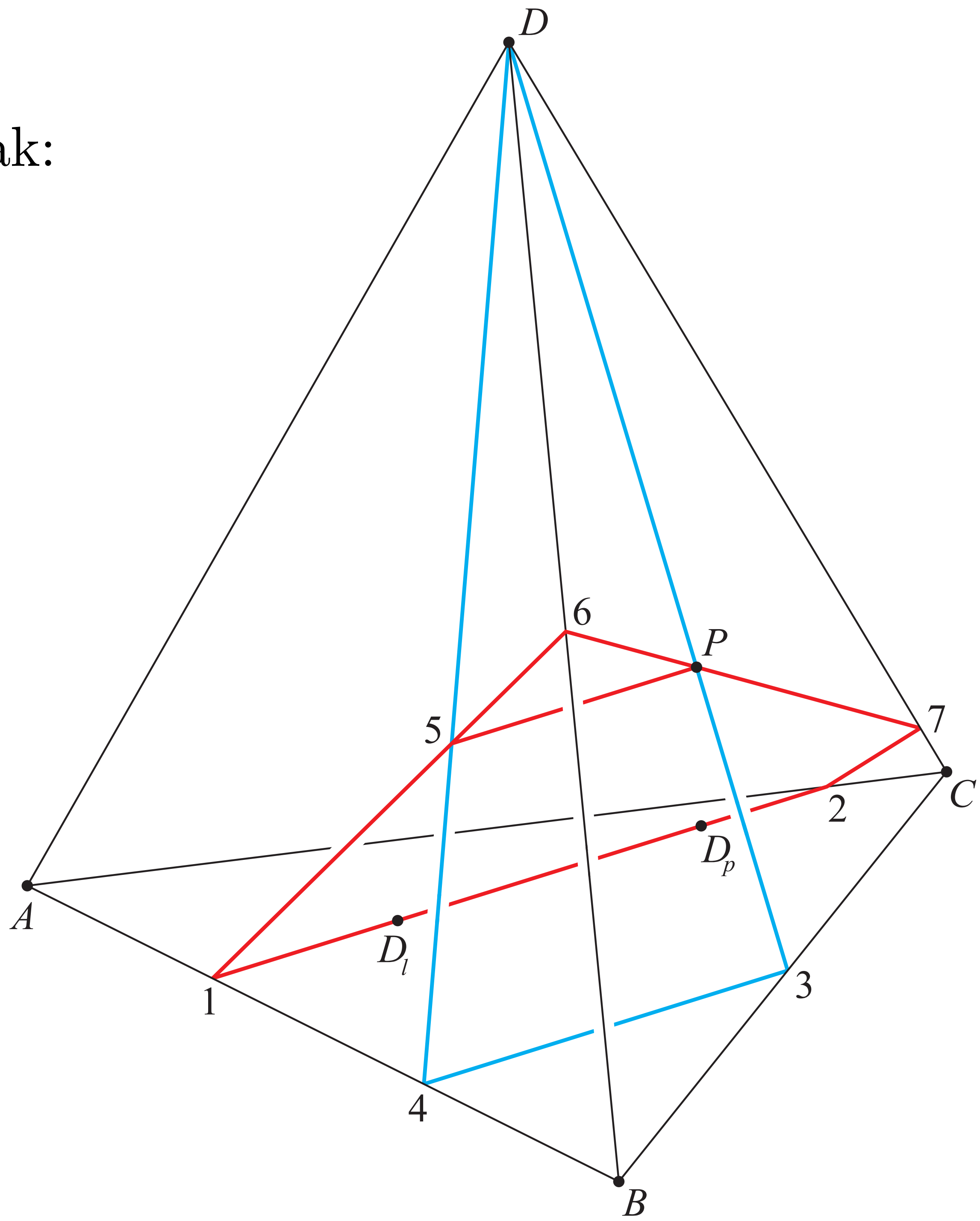
punkt P jest na prawej ścianie, a punkty D na podstawie.



Można tak:



A można i tak:



$12 \parallel 34 \parallel P5$

Jak widać, lista zasad powinna być powiększona o zdanie

Dowolne dwie proste równoległe leżą na jednej płaszczyźnie.

Jak widać, lista zasad powinna być powiększona o zdanie

Dowolne dwie proste równoległe leżą na jednej płaszczyźnie.

Ale czy to już wszystko?

Punkt P leży na prawej ścianie,

a punkty D na podstawie.