

Kolejny kwadrat

Termin „kwadrat” oznacza w tym zestawie zawsze: „kwadrat liczby całkowitej”.



Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki

Arkadiusz Męcel

14-15.05.2021 r.

Zadanie 1. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\dots0}_{99}3\underbrace{00\dots0}_{99}1$ nie jest kwadratem.

Zadanie 2. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n liczba $n(n+3)$ jest kwadratem?

Zadanie 3. Udowodnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie może być kwadratem.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a, b spełniających równanie

$$a^2 + \text{NWD}(a^2, b^2) = b^2.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ jest niewymierna.

Zadanie 6 (Australia 2016). Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że liczba $2^n + 7^n$ jest kwadratem.

Zadanie 7. Niech x, y będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wykaż, że liczby $x^2 + y + 1$ oraz $y^2 + 4x + 3$ nie mogą być jednocześnie kwadratami. Wskazówka: rozważ osobno przypadki $x \geq y$ oraz $x < y$.

Zadanie 8. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech d będzie dodatnim dzielnikiem liczby $2n^2$. Pokaż, że liczba $n^2 + d$ nie jest kwadratem.

Zadanie 9. Pomiędzy kolejnymi kwadratami może być zawarta wielokrotność kwadratu (mamy na przykład $5^2 < 2 \cdot 4^2 < 6^2$). Pokaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d takie, że $a^2 < bc^2 < bd^2 < (a+1)^2$.

Zadanie 10. Liczby całkowite a, b spełniają, dla pewnego n całkowitego, nierówność $n^2 < a < b < (n+1)^2$. Pokaż, że ab nie jest kwadratem.

Zadanie 11. Czy pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych można zmieścić dwa różne sześciiany? Innymi słowy, czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, n takie, że $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

Zadanie 12. Niech S_n oznacza sumę pierwszych n liczb pierwszych. Udowodnij, że dla każdego $n \geq 1$ pomiędzy liczbą S_n a liczbą S_{n+1} znajduje się kwadrat, czyli istnieje liczba całkowita m taka, że $S_n < m^2 < S_{n+1}$.

Zadanie 13 (Náboj 2018, Zadanie 32). Podczas porządkowania strychu, Zbyszek znalazł stary kalkulator, który potrafi obliczać pierwiastki kwadratowe, jednak jego wyświetlacz pokazuje tylko dwie cyfry po przecinku. Przykładowo, dla $\sqrt{4}$ urządzenie pokaże 2.00, a dla $\sqrt{6} = 2,44949\dots$ będzie to 2.44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, nie będąca kwadratem liczby całkowitej, której pierwiastek kalkulator Zbyszka wyświetli z dwoma zerami po przecinku?

Zadanie 14. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że suma dzielników dodatnich liczby p^4 jest kwadratem.

Zadanie 15. Ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \dots$ złożony jest z liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami. Pokaż, że n -ty wyraz tego ciągu jest równy

$$n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x , czyli taką liczbę całkowitą m , że $m \leq x < m+1$.

Źródła

1. Andreescu T., Andrica D., Feng Z.: *104 Number Theory Problems*, Birkhäuser (2006).
2. Archiwum zawodów międzynarodowych Náboj (<https://math.naboj.org/archive.php>).
3. Forum Art of Problem Solving (<https://artofproblemsolving.com/community>).
4. Guzicki W.: *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, ORE 2013 (dostępny online).
5. Iowa State University M.D. Problem of the Week (<https://orion.math.iastate.edu/ehjohnst/PoW/PoW.html>).
6. Kieza M.: *Między kwadratami*, Gazetka OMJ „Kwadrat” 21 (2017).
7. KöMaL (magazyn węgierski, ale o specjalnych wydaniach w języku angielskim: <https://www.komal.hu/>).
8. Li K.: *Perfect squares*, Mathematical Excalibur 21 (2018) (<https://www.math.ust.hk/excalibur/>).
9. Santos D.: *Number Theory for Mathematical Contests*.
10. The Berkeley Math Circle Archives (<https://mathcircle.berkeley.edu/circle-archives>).
11. Xu J.: *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses: For Junior Section*, World Scientific (2010).