Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 7
grudzień 2012

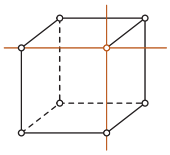
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

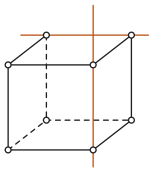
Czy istnieje taki wielościan...?

W niektórych zadaniach olimpijskich pojawia się pytanie o to, czy istnieje wielościan spełniający określone warunki. W jaki sposób należy postąpić, jeśli chcemy uzasadnić, że taką bryłę da się zbudować?

Naturalnym pomysłem, który się narzuca, jest narysowanie odpowiedniego przykładu. Wiążą się z tym jednak pewne trudności. Po pierwsze rysunek na płaszczyźnie nie zawsze oddaje wiernie to, co ma miejsce w trzech wymiarach. Na przykład, patrząc na rysunek 1, który przedstawia dwie proste znajdujące się w przestrzeni, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy te proste mają punkt wspólny (rys. 2), czy też nie (rys. 3).


rys. 1

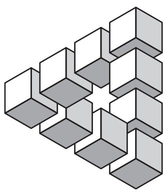

rys. 2

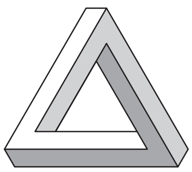

rys. 3

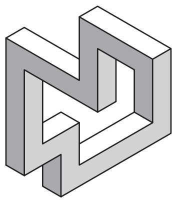
Druga trudność polega na tym, że próbując narysować nietypowy wielościan, często otrzymujemy rysunek czegoś, co w trzech wymiarach nie jest wielościanem! Tak się może stać nawet wtedy, gdy nasz rysunek wygląda całkiem realnie, a nam wydaje się, że widzimy na nim przestrzenną bryłę, której wygląd jesteśmy w stanie opisać.

W niniejszym artykule zobaczymy przykłady takich sytuacji oraz zastanowimy się nad tym, jak powinno wyglądać poprawne uzasadnienie istnienia wielościanu spełniającego określone warunki.

Pierwsze rysunki nieistniejących brył (lub nieistniejących konfiguracji przestrzennych znanych brył) pochodzą z książki holenderskiego popularyzatora matematyki Bruno Ernsta *Adventures with impossible figures*. Motyw dziewięciu sześcianów na rysunku 4 został po raz pierwszy wykorzystany w grafice *Hommage à Bruno Ernst, perspective japonaise n° 293a* szwedzkiego grafika Oscara Reutersvärda w roku 1934. Wzorowany na nim rysunek 5 nieistniejącego wielościanu był wykorzystywany wielokrotnie przez różnych grafików.

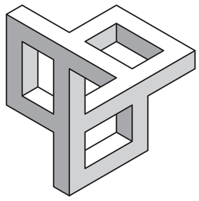

rys. 4

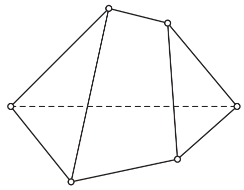

rys. 5


rys. 6

Następne dwa rysunki (rys. 6, 7) są niewielkimi modyfikacjami rysunków pochodzących od Reutersvärda i Ernsta i znajdujących się we wspomnianej książce.

To, że wielościany takie (lub ich konfiguracje) w rzeczywistości nie istnieją, powinno być widoczne dla każdego. Przyjrzyjmy się teraz mniej oczywistym przykładom. Zaczniemy od pewnego zadania.


rys. 7


rys. 8

Zadanie 1.

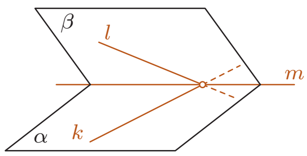
Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma pięć ścian — dwie trójkątne i trzy czworokątne — oraz żadna ściana czworokątna nie jest trapezem?

Odpowiedź brzmi: „tak, istnieje”, a uzasadnienie wydaje się bardzo proste: wystarczy spojrzeć na rysunek 8, aby dostrzec na nim bryłę spełniającą warunki zadania. Z przodu, z tyłu i na dole znajdują się ściany czworokątne, a po bokach trójkątne. Widzimy także nierównoległe krawędzie, co przekonuje nas, że żadna ściana czworokątna nie jest trapezem (rysunek dwóch równoległych prostych znajdujących się w przestrzeni przedstawiałby proste równoległe). Wszystkie wymagania, jakie nakładają na nas warunki zadania zostały więc spełnione.

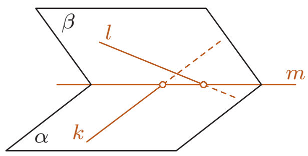
Mając jednak świeżo w pamięci poprzednie rysunki nieistniejących wielościanów, można się zaniepokoić i zapytać: czy rysunek 8 przedstawia istniejącą bryłę? Poddajmy zatem rysunek ten dokładniejszej analizie. Użyteczne okaże się następujące

Spostrzeżenie

Prosta k leży w płaszczyźnie α, a prosta l w płaszczyźnie β (rys. 9). Ponadto prosta m jest częścią wspólną płaszczyzn α i β. Wówczas jeśli proste k i l mają w przestrzeni punkt wspólny, to leży on na prostej m.



rys. 9



rys. 10

Uzasadnienie spostrzeżenia: wszystkie punkty prostej k leżą w płaszczyźnie α, a wszystkie punkty prostej l — w płaszczyźnie β, a zatem jedynym „miejscem”, gdzie obie te proste mogą się „spotkać” jest część wspólna płaszczyzn α i β, czyli prosta m.

Z powyższego spostrzeżenia wynika, że jeśli proste k i l, leżące odpowiednio w płaszczyznach α i β, przecinają wspólną prostą obu płaszczyzn w *różnych* punktach, to proste k i l nie mają punktów wspólnych w przestrzeni (rys. 10).

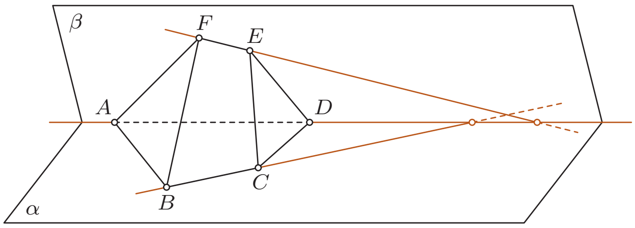
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przejdźmy teraz do analizy rysunku 8. Przypuśćmy, że przedstawia on istniejący wielościan i oznaczmy jego wierzchołki tak, jak pokazano na rysunku 11.

Oznaczmy ponadto przez α płaszczyznę zawierającą ścianę $ABCD$, a przez β płaszczyznę zawierającą ścianę $ADEF$. Częścią wspólną obu tych płaszczyzn jest prosta AD. Proste BC i EF przecinają prostą AD w dwóch różnych punktach (rys. 11). Stąd wniosek, że proste te nie mają w przestrzeni punktów wspólnych.

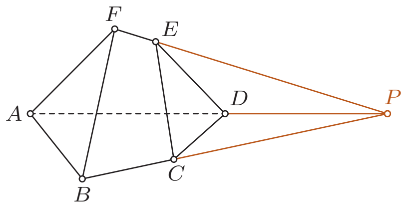
Tymczasem proste BC i EF leżą w jednej płaszczyźnie (zawierającej ścianę $BCEF$) i nie są równoległe (gdyż czworokąt $BCEF$ nie jest trapezem). Wobec tego proste te przecinają się w przestrzeni (w pewnym punkcie płaszczyzny $BCEF$).

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że rysunek 8 w istocie przedstawia nieistniejący wielościan!



rys. 11

Jak zatem opisać bryłę, która spełnia warunki zadania, skoro rysunek nie jest dostatecznym argumentem dla dowodu jej istnienia? W tym celu należy przeprowadzić odpowiednią konstrukcję *w przestrzeni*.



rys. 12

Rozpatrzmy dowolny czworościan $ABFP$ (rys. 12). Na krawędziach BP, AP i FP wybieramy odpowiednio punkty C, D i E w taki sposób, aby prosta CD nie była równoległa do prostej AB, prosta DE nie była równoległa do prostej AF, a także prosta EC nie była równoległa do prostej BF. Innymi słowy, punkty C, D i E wybieramy w taki sposób, aby płaszczyzna CDE nie była równoległa do żadnej z krawędzi AB, BF i AF. Następnie przecinamy czworościan $ABFP$ płaszczyzną przechodzącą przez punkty C, D i E i odrzucamy od niego czworościan $CDEP$.

Otrzymujemy w ten sposób wielościan spełniający warunki zadania.

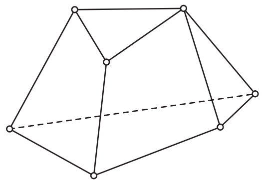
Zadanie 2.

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma sześć ścian — dwie trójkątne i cztery czworokątne — oraz żadna ściana czworokątna nie jest trapezem?

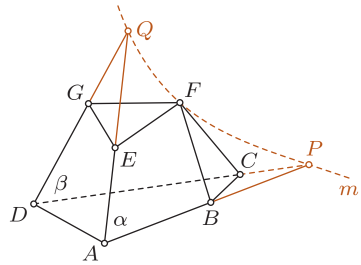
Przykład takiej bryły widzimy na rysunku 13: ma ona dwie ściany trójkątne (na górze i z prawej strony) oraz cztery czworokątne (z przodu, z tyłu, na dole i z lewej strony). Ponadto żadna ściana czworokątna nie jest trapezem. Pozostaje pytanie: czy rysunek 13 przedstawia wielościan?

Przypuśćmy, że tak jest i oznaczmy wierzchołki tego wielościanu jak na rysunku 14. Niech ponadto α będzie płaszczyzną zawierającą ścianę $ABFE$, a β — płaszczyzną zawierającą ścianę $CDGF$. Płaszczyzny te nie są równoległe, bowiem do obu należy punkt F. A zatem częścią wspólną tych płaszczyzn jest pewna prosta m przechodząca przez punkt F.

Proste AB i CD leżą w jednej płaszczyźnie (zawierającej ścianę $ABCD$) i nie są równoległe. Wobec tego istnieje w przestrzeni punkt wspólny P obu tych prostych. Ponadto prosta AB leży w płaszczyźnie α, a prosta CD w płaszczyźnie β, więc ich punkt wspólny P leży na prostej wspólnej płaszczyzn α i β, czyli na prostej m.



rys. 13



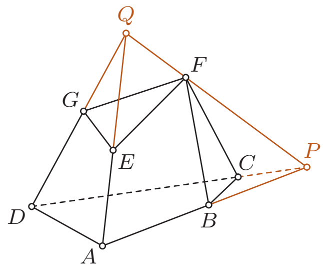
rys. 14

Analogicznie uzasadniamy, że proste AE i DG mają w przestrzeni punkt wspólny Q leżący na prostej m. Stąd wniosek, że punkty F, P i Q leżą na jednej prostej wbrew temu, co przedstawia rysunek 14. A zatem rysunek ten obrazuje w istocie nieistniejący wielościan!

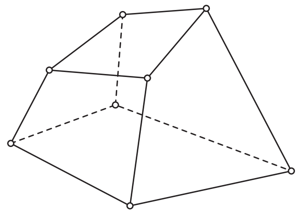
Aby więc uzasadnić istnienie bryły spełniającej warunki zadania 2, powinniśmy przeprowadzić jej *przestrzenną* konstrukcję.

W tym celu weźmy pod uwagę dowolny czworościan $DAPQ$ i wybierzmy jakikolwiek punkt F na krawędzi PQ, różny od P i Q (rys. 15). Następnie zaznaczmy na krawędziach AP i DP odpowiednio punkty B i C w taki sposób, aby płaszczyzna BCF nie była równoległa do żadnej z prostych DA, AQ i QD. Podobnie, na krawędziach AQ i DQ obierzmy odpowiednio punkty E i G w taki sposób, aby płaszczyzna EFG nie była równoległa do żadnej z prostych AP, PD i DA.

Poprowadźmy teraz płaszczyzny BCF i EFG, odcinając od czworościanu $DAPQ$ czworościany $BCFP$ oraz $EFGQ$. W efekcie uzyskujemy wielościan, który spełnia warunki zadania.



rys. 15



rys. 16

Na koniec kilka zadań dla Czytelników. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.

Rysunek 16 przedstawia bryłę, która ma sześć ścian — wszystkie czworokątne, z których żadna nie jest trapezem. Czy jest to rysunek istniejącej bryły? Podaj przestrzenną konstrukcję bryły spełniającej warunki zadania.

Zadanie 4. (IV OMG, zawody III stopnia)

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. (V OMG, zawody III stopnia)

Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.

Wojciech Guzicki, Waldemar Pompe

Teraz (znowu) Polska!

Mamy przyjemność zakomunikować, że podczas tegorocznej Olimpiady Matematycznej Krajów Europy Środkowej (*Middle European Mathematical Olympiad*, MEMO), która odbyła się we wrześniu 2012 r. w Solothurn w Szwajcarii, Polacy ponownie osiągnęli podwójne zwycięstwo. Nasza reprezentacja w składzie:

- Sławomir Kubicki, I LO w Koszalinie,
- Barbara Mroczek, XIV LO w Warszawie,
- Paweł Nałęcz-Jawecki, XIV LO w Warszawie,
- Konrad Jan Paluszek, XIV LO w Warszawie,
- Kamil Rychlewicz, I LO w Łodzi,
- Bartłomiej Żak, XIV LO w Warszawie,

która została wyłoniona na podstawie wyników zeszłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej, w zawodach drużynowych zajęła pierwsze miejsce, osiągając wynik 56 punktów. Druga była ekipa Węgier, która uzyskała 46 punktów, a trzecie miejsce zajęła reprezentacja Chorwacji (45 punktów).

Ponadto Kamil Rychlewicz zdobył złoty medal oraz zwyciężył w rywalizacji indywidualnej. Na dodatkowe wyróżnienie na łamach naszej gazetki zasługuje również Konrad Jan Paluszek, który w zawodach MEMO wywalczył brązowy medal i był najmłodszym reprezentantem Polski, świeżo upieczonym absolwentem Gimnazjum nr 42 w Warszawie oraz zeszłorocznym laureatem OMG. Serdecznie gratulujemy całemu zespołowi!

Więcej informacji o zawodach MEMO można znaleźć w *Kwadracie* nr 2 (grudzień 2011).

Kwadraty, liczby pierwsze i reszta

Czasami w zadaniach olimpijskich pojawia się problem rozstrzygnięcia, czy liczba, którą można zapisać w postaci danego wyrażenia, może być kwadratem pewnej liczby całkowitej. Zwykle odpowiedź okazuje się przecząca, a stoi za tym fakt, że przy dzieleniu przez określone liczby kwadraty wcale nie muszą dawać wszystkich możliwych reszt.

Do zapisu reszty z dzielenia szalenie przydatne okazują się *kongruencje*, czyli wyrażenia typu

$$a \equiv b \pmod{n},$$

które oznaczają tyle, że *liczby a i b dają jednakowe reszty przy dzieleniu przez n*. Główną użyteczną cechą kongruencji jest to, że można je dodawać, mnożyć, a w konsekwencji także potęgować stronami, prawie jak zwykłe równości. Więcej informacji o kongruencjach, ich własności oraz jak się nimi posługiwać, Czytelnik odnajdzie w broszurze *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2009.

Na początku wykażemy, że kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 nie mogą dawać reszty 2.

Każda liczba całkowita n daje z dzielenia przez 3 jedną z trzech możliwych reszt, co możemy zapisać jako:

$$n \equiv 0 \pmod{3}, \quad n \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{lub} \quad n \equiv 2 \pmod{3}.$$

Podnosząc powyższe kongruencje stronami do kwadratu, dostajemy odpowiednio

$$n^2 \equiv 0 \pmod{3}, \quad n^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{lub} \quad n^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Teraz już widzimy, że 2 jako reszta nie występuje w żadnym przypadku.

W podobny sposób można wykazać na przykład, że kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez

- 4 mogą dawać jedynie reszty 0 lub 1,
- 5 mogą dawać jedynie reszty 0, 1 lub 4,
- 8 mogą dawać jedynie reszty 0, 1 lub 4.

Dowody, analogiczne do powyższego, pozostawiamy dla Czytelnika.

Często zadania dotyczące reszt, które dają kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez określone liczby, są połączone z rozważaniami dotyczącymi liczb pierwszych. Zaskakująco istotne jest oczywiste spostrzeżenie, że *jedyną liczbą pierwszą podzielną przez liczbę pierwszą p jest p*. Oto przykład.

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 także jest pierwsza.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli liczba p nie dzieli się przez 3, to $p \equiv 1 \pmod{3}$ lub $p \equiv 2 \pmod{3}$. Stąd w obu przypadkach dostajemy $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. A zatem

$$p^2+2 \equiv 0 \pmod{3},$$

co oznacza, że liczba p^2+2 jest podzielna przez 3. Ponadto liczba p^2+2 jest większa od 3, gdyż p — jako liczba pierwsza — jest nie mniejsza od 2. Wobec tego liczba p^2+2 musi być złożona.

Jeśli z kolei liczba p dzieli się przez 3, to musi być równa 3, gdyż jest to liczba pierwsza. Wtedy $3^2+2=11$ również jest liczbą pierwszą. Wobec tego jedyną liczbą p spełniającą warunki zadania jest $p=3$.

Do rozwiązania kolejnego zadania przyda się następujące spostrzeżenie: *jeżeli kwadrat liczby całkowitej jest podzielny przez pewną liczbę pierwszą p, to jest też podzielny przez liczbę p^2*. Rzeczywiście, jeżeli n^2 jest liczbą podzielną przez p, to również n musi być liczbą podzielną przez p, czyli $n=kp$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wówczas $n^2=k^2p^2$, skąd oczywiście wynika, że liczba n^2 jest podzielną przez p^2.

Zadanie 2. (I CPS Juniorów, 2012 r.)

Wykaż, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2+1)-n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zastanówmy się, jakie reszty z dzielenia przez 3 może dawać liczba $2(n^2+1)-n$.

Jeżeli $n \equiv 0 \pmod{3}$, to

$$2(n^2+1)-n \equiv 2(0^2+1)-0 = 2 \pmod{3},$$

więc liczba ta nie może być kwadratem liczby całkowitej. Podobnie jeśli $n \equiv 2 \pmod{3}$, to otrzymujemy

$$2(n^2+1)-n \equiv 2(2^2+1)-2 = 8 \equiv 2 \pmod{3}.$$

To oznacza, że jeśli liczba $2(n^2+1)-n$ miałaby być kwadratem liczby całkowitej, to n musi dawać resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

W takim razie liczba n daje resztę 1, 4 lub 7 przy dzieleniu przez 9. Jednak w każdym z tych trzech przypadków uzyskujemy

$$2(n^2+1)-n \equiv 3 \pmod{9}.$$

To zaś oznacza, że liczba $2(n^2+1)-n$ jest podzielna przez 3, ale niepodzielna przez 9. Liczba o tej własności nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (Koło Matematyczne OMG, zestaw 8)
Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Popatrzmy na reszty, jakie daje pięć kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 4. Każda z możliwych reszt 0, 1, 2, 3 pojawia się dokładnie raz pośród czterech kolejnych liczb całkowitych. Skoro liczb jest pięć, to pewna z tych czterech reszt, powiedzmy r, pojawia się dwa razy. Tym samym suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 4 tę samą resztę, co liczba $0^2+1^2+2^2+3^2+r^2$, a wtedy

$$0^2+1^2+2^2+3^2+r^2 = 14+r^2 \equiv 2+r^2 \pmod{4}.$$

Liczba r^2, jako kwadrat liczby całkowitej, może dawać tylko resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4, a zatem liczba $2+r^2$ daje resztę 2 lub 3. Stąd wniosek, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 4 jedną z reszt 2 lub 3 i wobec tego nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Na koniec jeszcze kilka zadań, na pierwszy rzut oka różniących się nieco od zaprezentowanych powyżej, które wykorzystują w rozwiązaniach omówioną metodę. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.
Wykaż, że łączna liczba ścian, wierzchołków i krawędzi w (a) graniastosłupie, (b) ostrosłupie, nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5. (VII OM, zawody III stopnia)
Wykaż, że jeżeli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie $a^2+b^2=c^2$, to:
(a) co najmniej jedna z liczb a i b dzieli się przez 3,
(b) co najmniej jedna z liczb a i b dzieli się przez 4,
(c) co najmniej jedna z liczb a, b, c dzieli się przez 5.

Zadanie 6. (XVI OM, zawody II stopnia)
Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Zadanie 7. (LXIII OM, zawody I stopnia)
Znajdź wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y), że liczba 2^x+5^y jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 8.
Udowodnij, że jeżeli liczba $1+3^n+5^n$ jest pierwsza, to liczba n jest podzielna przez 12.

Łukasz Bożyk

... i żyli długo i szczęśliwie

Miło nam ogłosić, że 22 września 2012 r. nasza redakcyjna koleżanka Urszula Swianiewicz wyszła za mąż za Lecha Pastwę, stając się naszą redakcyjną koleżanką Urszulą Pastwą. Tłumaczy to zmianę w stopce redakcyjnej i daje nam powód, abyśmy na zakończenie tego wydania *Kwadratu* życzyli parze młodej mnóstwo szczęścia na nowej drodze życia. :)

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Szufladki i reszty z dzielenia

8. Tak. Każda liczba całkowita daje jedną z czterech możliwych reszt z dzielenia przez 4, a danych mamy pięć liczb. Stąd pewne dwie spośród nich muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez 4. Rozważ ich różnicę.

9. Wśród danych 12 liczb pewne dwie muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez 11, więc ich różnica dzieli się przez 11. Uzasadnij, że jest ona żądanej postaci.

10. Rozważ reszty z dzielenia przez 2012 kolejnych sum skonstruowanych analogicznie, jak w zadaniu 7.

11. Jeśli pewne dwie z danych $n+2$ liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez $2n$, to ich różnica dzieli się przez $2n$. Załóżmy więc, że każda z liczb daje inną resztę. Wykaż, że wtedy suma reszt pewnych dwóch z danych $n+2$ liczb jest równa $2n$. Rozważ w tym celu następujący podział zbioru możliwych reszt:

$$\{0\}, \{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \{3, 2n-3\}, \ldots, \{n-1, n+1\}, \{n\}.$$

12. Rozważ kolejne iloczyny skonstruowane podobnie, jak sumy w zadaniu 7. Takich iloczynów jest $p-1$, żaden z nich nie dzieli się przez p. Uzasadnij, że któryś z nich daje resztę 1 lub pewne dwa z nich dają tę samą resztę z dzielenia przez p. W drugim przypadku, rozważ różnicę tych iloczynów.

13. Uzasadnij, że wyrażeń postaci $x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{11}a_{11}$, gdzie każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ wynosi 0 lub 1, jest $2^{11}=2048>1989$. Wobec tego pewne dwie z tak wyrażonych liczb dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 1989. Rozważ ich różnicę.

Oblicz dwoma sposobami

5. Zauważ, że suma trzech liczb w każdym pudełku jest parzysta.

6. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniu 2. Zauważ, że skoro sześcian ma 8 wierzchołków, to podwojona suma numerów na krawędziach dzieli się przez 8.

7. Rozumując podobnie jak w zadaniu 2 wykaż, że dwukrotność liczby krawędzi dzieli się przez 4.

8. Zauważ, że podwojona suma wszystkich liczb w tablicy jest równa $A+B$.

Trójkąty równoramienne w wielokątach

Dowód równości $k(4n+2)=2\cdot k(2n+1)$ rozbijemy na dwa kroki. W pierwszym kroku wykażemy, że $k(4n+2)\leqslant 2\cdot k(2n+1)$, natomiast w drugim, że $k(4n+2)\geqslant 2\cdot k(2n+1)$.

Krok pierwszy. Udowodnimy ogólniejszą nierówność, a mianowicie $k(2n)\leqslant 2\cdot k(n)$. W tym celu wyróżnijmy co drugi wierzchołek danego $(2n)$-kąta foremnego, rozbijając go w ten sposób na dwa n-kąty foremne. Jeśli wybierzemy więcej niż $2\cdot k(n)$ wierzchołków, to w myśl zasady szufladkowej, w którymś z tych dwóch n-kątów wyróżnimy więcej niż $k(n)$ wierzchołków, a wtedy wśród nich znajdą się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Stąd $k(2n)\leqslant 2\cdot k(n)$.

Krok drugi. Podobnie jak wyżej, wyróżniamy co drugi wierzchołek danego $(4n+2)$-kąta, uzyskując w ten sposób dwa $(2n+1)$-kąty foremne. W jednym z tych $(2n+1)$-kątów wybieramy $k(2n+1)$ wierzchołków, z których żadne trzy nie tworzą trójkąta równoramiennego i odbijamy te punkty symetrycznie względem środka wielokąta. Dostajemy w ten sposób $k(2n+1)$ punktów w drugim wielokącie, czyli łącznie $2\cdot k(2n+1)$ punktów. Pozostaje uzasadnić, że wśród tak wybranych $2\cdot k(2n+1)$ punktów żadne trzy nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Stąd $k(4n+2)\geqslant 2\cdot k(2n+1)$.

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com