Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 16
lipiec 2015
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Bliźniacze zadania

Zadania geometryczne często występują w kilku zbliżonych do siebie wersjach. Umiejętność przeformułowania zadania z jednej wersji do drugiej może być niekiedy kluczem do rozwiązania problemu. W „bliźniaczej” konfiguracji zauważenie równych kątów, odcinków lub innych istotnych zależności może być łatwiejsze i nasunąć pomysł na rozwiązanie właściwego zadania.

Poniżej zebraliśmy kilka przykładów bliźniaczych zadań. Zadania o numerach nieparzystych to proste i znane konfiguracje. Następujące po nich zadania o numerach parzystych to ich modyfikacje, które wydają się już trudniejsze. Zobaczymy jednak, że rozwiązania tych zadań przebiegają niemalże identycznie, jak w przypadku ich łatwiejszych odpowiedników.

Poniższe przykłady warto również poznać z tego powodu, że są one często pomocne przy rozwiązywaniu innych, trudniejszych geometrycznych problemów.

Zadanie 1.

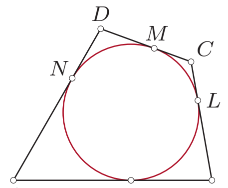
W czworokąt wypukły $ABCD$ wpisano okrąg. Udowodnij, że $AB+CD=BC+AD$.

Rozwiązanie

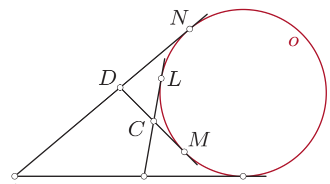
Oznaczmy punkty styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, CD, DA przez K, L, M, N (rys. 1). Ponieważ odcinki styczne do okręgu poprowadzone z jednego punktu są równej długości, więc $AK=AN$, $BK=BL$, $CM=CL$ oraz $DM=DN$. Zatem

$$\begin{aligned} AB+CD &= AK+BK+CM+DM= \\ &= BL+CL+AN+DN= \\ &= BC+AD, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Okrąg o jest styczny do prostych AB, BC, CD, DA w sposób przedstawiony na rysunku 2. Udowodnij, że $AB+BC=AD+CD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy punkty styczności okręgu o odpowiednio z prostymi AB, BC, CD, AD przez K, L, M, N. Wówczas spełnione są następujące równości: $AK=AN$, $BK=BL$, $CL=CM$ oraz $DM=DN$. Stąd uzyskujemy zależności

$$\begin{aligned} AB+BC &= AK-BK+BL-CL= \\ &= AK-CL=AN-CM= \\ &= AN-DN+DM-CM= \\ &= AD+CD. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Zadanie 3.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Udowodnij, że

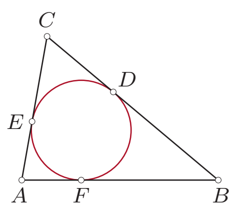
$$BD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC).$$

Rozwiązanie

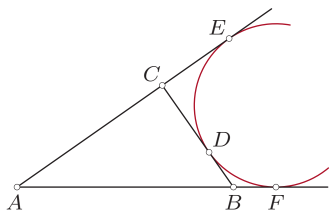
Niech E i F będą punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC i AB (rys. 3). Wówczas spełnione są równości $AE=AF$, $BD=BF$ oraz $CD=CE$. Zatem

$$\begin{aligned} 2BD &= BD+BF= \\ &= BC-CD+AB-AF= \\ &= AB+BC-CE-AE= \\ &= AB+BC-AC. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez 2, uzyskujemy tezę.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 4.

Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Udowodnij, że

$$CD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC).$$

Rozwiązanie

Niech E i F będą punktami styczności danego okręgu odpowiednio z prostymi AC i AB (rys. 4). Wówczas $AE=AF$, $BD=BF$ oraz $CD=CE$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 2CD &= CD+CE= \\ &= BC-BD+AE-AC= \\ &= AF-BF+BC-AC= \\ &= AB+BC-AC. \end{aligned}$$

Po podzieleniu obu stron uzyskanej zależności przez 2, otrzymujemy tezę.

W dalszej części artykułu będziemy przez $[\mathcal{F}]$ oznaczać pole figury $\mathcal{F}$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi r. Udowodnij, że

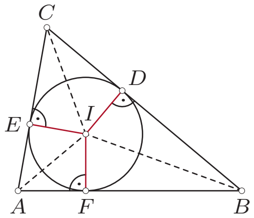
$$[ABC]=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r\,.$$

Rozwiązanie

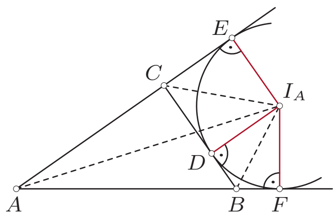
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 5). Wysokości trójkątów BCI, CAI i ABI opuszczone na boki BC, CA, AB są równe r. Wobec tego $[BCI]=\frac{1}{2}ar$, $[CAI]=\frac{1}{2}br$ oraz $[ABI]=\frac{1}{2}cr$. Stąd otrzymujemy

$$[ABC]=[BCI]+[CAI]+[ABI]= \\ =\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Zadanie 6.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Promień okręgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku BC wynosi r_A. Udowodnij, że

$$[ABC]=\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_A\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez I_A środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC (rys. 6). Podobnie jak poprzednio, wysokości trójkątów CAI_A, ABI_A i BCI_A opuszczone na boki CA, AB i BC są równe r_A. Wobec tego $[CAI_A]=\frac{1}{2}br_A$, $[ABI_A]=\frac{1}{2}cr_A$ oraz $[BCI_A]=\frac{1}{2}ar_A$. Stąd uzyskujemy

$$[ABC]=[CAI_A]+[ABI_A]-[BCI_A]= \\ =\frac{1}{2}br_A+\frac{1}{2}cr_A-\frac{1}{2}ar_A=\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_A\,,$$

co kończy dowód.

Zadanie 7.

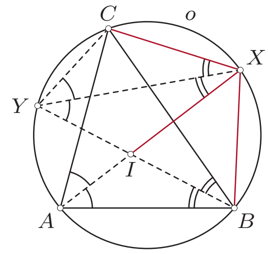
Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A. Udowodnij, że $XB=XC=XI$.

Rozwiązanie

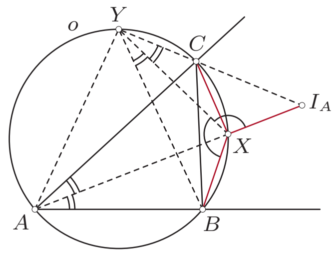
Ponieważ odpowiednie łuki BX i XC są równej długości, więc cięciwy BX i XC wyznaczone przez końce tych łuków są także równej długości. Pozostaje zatem wykazać, że $XC=XI$.

Oznaczmy przez Y środek tego łuku AC okręgu o, który nie zawiera punktu B (rys. 7). Wówczas półproste AX i BY są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC oraz CBA — przecinają się więc w punkcie I.

Ponieważ punkt X jest środkiem łuku BC, więc kąty BYX i XYC są wpisane oparte na łukach tej samej długości. Wobec tego $\sphericalangle IYX=\sphericalangle XYC$. Analogicznie $\sphericalangle IXY=\sphericalangle YXC$. Ponadto trójkąty IXY oraz CXY mają wspólny bok XY, więc są one przystające na mocy cechy kąt–bok–kąt. Zatem $XI=XC$.



rys. 7



rys. 8

Zadanie 8.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I_A jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A. Wykaż, że $XB=XC=XI_A$.

Rozwiązanie

Równość $XB=XC$ uzasadniamy tak, jak w poprzednim zadaniu. Pozostaje dowieść, że $XB=XI_A$. Zależność tę wykażemy przy założeniu, że $AC>BC$.

Oznaczmy przez Y środek tego łuku AB, który zawiera punkt C (rys. 8). Wówczas $AY=BY$, skąd wniosek, że $\sphericalangle BAY=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle AYB$. A zatem

$$\sphericalangle BCI_A=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle ACB)=90^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle ACB= \\ =90^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle AYB=\sphericalangle BAY=180^\circ-\sphericalangle YCB\,.$$

Wobec tego prosta CY przechodzi przez punkt I_A. Punkt I_A leży również na prostej AX, gdyż zawiera ona dwusieczną kąta BAC.

Zauważmy też, że

$$\sphericalangle XYI_A=\sphericalangle XYC=\sphericalangle XAC=\sphericalangle XAB=\sphericalangle BYX$$

oraz

$$\sphericalangle I_AXY=180^\circ-\sphericalangle YXA=180^\circ-\sphericalangle YBA= \\ =180^\circ-\sphericalangle BAY=\sphericalangle BXY\,.$$

Ponadto trójkąty I_AXY i BXY mają wspólny bok XY. W myśl cechy przystawania kąt–bok–kąt oznacza to, że trójkąty I_AXY i BXY są przystające. Stąd wniosek, że $XI_A=XB$. To kończy dowód.

Rozwiązując zadania, należy zwrócić szczególną uwagę na to, czy rozumowanie jest poprawne we wszystkich możliwych konfiguracjach. Przykładowo, wyżej zaprezentowane rozwiązanie zadania 8 wymagałoby wprowadzenia pewnych zmian, jeśli trójkąt ABC spełniałby warunek $AC\leqslant BC$. Zachęcamy Czytelnika do przeprowadzenia rozumowania w tym bliźniaczym przypadku.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 9.

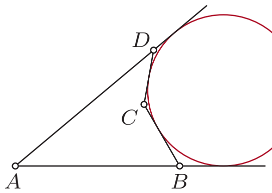
Dany jest okrąg o oraz punkt P nieleżący na nim. Proste k, l przechodzące przez P przecinają okrąg o odpowiednio w punktach A, B oraz C, D. Udowodnij, że $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

Zadanie 10.

Punkt P leży na zewnątrz okręgu o. Punkty A, B, C leżą na okręgu o, przy czym A leży na odcinku PB, a prosta PC jest styczna do okręgu o. Udowodnij, że $PA\cdot PB=PC^2$.

Zadanie 11.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Okrąg o jest styczny do prostych AB, BC, CD, DA tak, jak pokazano na rysunku 9. Udowodnij, że $AB+BC=AD+DC$.



rys. 9

Zadanie 12.

Promień sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ma długość r. Wykaż, że objętość V tego czworościanu wyraża się wzorem

$$V=\frac{1}{3}([ABC]+[BCD]+[CDA]+[DAB])\cdot r\,.$$

Zadanie 13.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I_A jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC. Punkt Y jest środkiem tego łuku AB okręgu o, który zawiera punkt C. Wykaż, że

$$YA=YB=YI_A\,.$$

Tomasz Cieśla

Tożsamość Sophie Germain

Marie-Sophie Germain żyła w latach 1776–1831 we Francji. Jest to jedna z najsłynniejszych kobiecych twarzy w historii matematyki. Pamiętamy ją między innymi ze względu na jej osiągnięcia w dziedzinach teorii sprężystości i teorii liczb. Szczególnie dużo wniosła do historii zmagań ze słynnym Wielkim Twierdzeniem Fermata. W teorii liczb istnieje pojęcie *liczby pierwszej Sophie Germain*, czyli takiej liczby pierwszej p, dla której liczba $2p+1$ także jest pierwsza. Do dzisiaj nierozstrzygnięty jest problem, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Sophie Germain.

Uczestnicy olimpiad i konkursów matematycznych mogą kojarzyć jej nazwisko z jeszcze innego powodu. Chodzi o tak zwaną *tożsamość Sophie Germain*, która podaje rozkład wyrażenia x^4+4y^4 na iloczyn dwóch czynników. W nietrudny sposób można go wyprowadzić ze wzoru na różnicę dwóch kwadratów. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}x^4+4y^4&=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=\\&=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=\\&=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)\,.\end{aligned}$$

W praktyce często warto również iść o krok dalej, zapisując mniejszy z czynników jako

$$x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2.$$

Świadomość faktu, iż wyrażenie x^4+4y^4 można przedstawić w postaci iloczynu, jest często bardzo użyteczna podczas rozwiązywania zadań konkursowych. Zobaczmy to na przykładach.

Zadanie 1.

Dana jest liczba naturalna $n>1$. Udowodnij, że liczba n^4+4^n jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli liczba n jest parzysta, to liczba n^4+4^n również jest parzysta i oczywiście większa niż 2. Jest więc liczbą złożoną. Załóżmy zatem, że $n=2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej $k\geqslant 1$. Wtedy

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4\cdot 2^{4k}.$$

Stosując tożsamość Sophie Germain dla $x=n$ oraz $y=2^k$, dostajemy

$$n^4+4^n=(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1})(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1}).$$

Znaleźliśmy w ten sposób rozkład liczby n^4+4^n na iloczyn dwóch czynników. Musimy jeszcze sprawdzić, czy jest to rozkład nietrywialny, co sprowadza się do pytania, czy mniejszy z czynników jest większy od 1. Tak jest w istocie, gdyż

$$n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}=(n-2^k)^2+2^{2k}\geqslant 0+2^2=4,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Udowodnij, że liczba $3^{4^5}+4^{5^6}$ może być zapisana w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych, z których każda posiada więcej niż 2015 cyfr w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie

Zauważmy na początek, że

$$\frac{5^6-1}{4}=\frac{(5^3-1)(5^3+1)}{4}=\frac{124\cdot 126}{4}=31\cdot 126.$$

Niech $x=3^{4^4}$ oraz $y=4^{\frac{5^6-1}{4}}=4^{31\cdot 126}$. Wówczas

$$x^4+4y^4=(3^{4^4})^4+4\cdot(4^{\frac{5^6-1}{4}})^4=3^{4^5}+4^{5^6}.$$

Widzimy zatem, że z tak dobranymi x i y wyrażenie dane w zadaniu da się zapisać w postaci x^4+4y^4. Możemy więc zastosować tożsamość Sophie Germain, aby otrzymać

$$3^{4^5}+4^{5^6}=x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2).$$

Wystarczy udowodnić, że pierwszy z czynników posiada więcej niż 2015 cyfr, gdyż drugi czynnik jest w oczywisty sposób większy od pierwszego. Innymi słowy, zadanie zostało sprowadzone do wykazania nierówności

$$x^2-2xy+2y^2\geqslant 10^{2015}.$$

Ale

$$x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2\geqslant y^2=4^{62\cdot 126}.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$4^2=16>10,$$

a więc również

$$4^{62\cdot 126}=(4^2)^{31\cdot 126}>10^{31\cdot 126}=10^{3906}>10^{2015}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

W kolejnym zadaniu wykorzystamy pewien zwięzły sposób zapisywania sumy dużej liczby składników: sumę $a_1+a_2+\ldots+a_n$ liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ często zapisujemy w postaci

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\,.$$

Napis ten rozszyfrowujemy następująco: wszędzie tam, gdzie znajduje się litera k po prawej stronie znaku $\sum$, wstawiamy po kolei liczby naturalne, zaczynając od $k=1$, a kończąc na $k=n$, po czym uzyskanych n liczb sumujemy. Zatem na przykład

$$\sum_{k=1}^{100}k\cdot 7^k$$

oznacza sumę 100 składników:

$$1\cdot 7^1+2\cdot 7^2+3\cdot 7^3+\ldots+100\cdot 7^{100}.$$

Zadanie 3.

Wyznacz wartość sumy

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}.$$

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości Sophie Germain dla wyrażenia $4k^4+1$, dostajemy

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{2015}\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right).$$

Otrzymaliśmy więc sumę 2015 różnic dwóch składników. Zauważmy jednak, że $2k^2+2k+1=2(k+1)^2-2(k+1)+1$. Oznacza to, że składnik, który jest odejmowany w danym nawiasie, jest jednocześnie dodawany w następnym. A zatem

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot 1^2-2\cdot 1+1}-\frac{1}{2\cdot 2016^2-2\cdot 2016+1}=\frac{8\,124\,480}{8\,124\,481},$$

gdyż pozostałe składniki sumy skracają się.

Wszystkie przedstawione do tej pory przykłady opierały się na odkryciu, jak dane w zadaniu wyrażenie można przedstawić w postaci x^4+4y^4. Tożsamość Sophie Germain można jednak stosować również bardziej kreatywnie.

Zadanie 4.

Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

Rozwiązanie

Liczba n^2+1 nie musi dać się zapisać w postaci x^4+4y^4. Tutaj mamy jednak dowolność wyboru n, dobierzmy je więc tak, aby taki zapis był możliwy. Przyjmijmy $n=2m^2$ dla pewnej liczby naturalnej $m>1$. Na mocy tożsamości Sophie Germain mamy wówczas

$$n^2+1=4m^4+1=(2m^2-2m+1)(2m^2+2m+1).$$

Pierwszy z czynników jest mniejszy od $n=2m^2$, a więc również wszystkie jego dzielniki pierwsze są mniejsze od n. Jeżeli drugi czynnik byłby liczbą złożoną, to żaden jego dzielnik pierwszy nie przekraczałby połowy tej liczby. Każdy byłby więc nie większy od

$$\frac{1}{2}(2m^2+2m+1)=m^2+m+\frac{1}{2}<2m^2=n.$$

Wystarczy zatem znaleźć nieskończenie wiele liczb naturalnych m, dla których liczba $2m^2+2m+1$ jest złożona i wówczas zadanie zostanie rozwiązane.

Zauważmy, że jeżeli liczba m daje resztę 1 z dzielenia przez 5, to

$$2m^2+2m+1\equiv 2+2+1\equiv 0 \pmod 5,$$

co oznacza, że liczba $2m^2+2m+1$ dzieli się przez 5. Skoro $m>1$, to jest ona większa niż 5, a więc jest to liczba złożona.

Ostatecznie, dla każdego $k\geqslant 1$ liczba $n=2(5k+1)^2$ spełnia warunki zadania. Kończy to dowód, gdyż liczb tej postaci jest nieskończenie wiele.

Na koniec proponujemy kilka zadań, w których Czytelnicy mogą samodzielnie spróbować odnaleźć tożsamość Sophie Germain.

Zadanie 5.

Udowodnij, że liczba $2^{10}+5^{12}$ jest złożona.

Zadanie 6.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich a, które posiadają następującą własność: dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^4+a jest złożona.

Zadanie 7.

Oblicz wartość iloczynu

$$\frac{(1^4+\frac14)(3^4+\frac14)(5^4+\frac14)\cdot\ldots\cdot(11^4+\frac14)}{(2^4+\frac14)(4^4+\frac14)(6^4+\frac14)\cdot\ldots\cdot(12^4+\frac14)}.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że liczba $3^{2008}+4^{2009}$ może być zapisana w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest większa od 2015^{182}.

Tomasz Kobos

Podwojenie sukcesu

Jest nam niezmiernie miło poinformować, że Piotr Pawlak, kilkukrotny laureat OMG, z którym wywiad zamieściliśmy w poprzednim numerze *Kwadratu*, zakwalifikował się do XVII Międzynarodowego Konkursu Pianistycznego im. Fryderyka Chopina. W październikowych zawodach Piotr rywalizować będzie z 83 najwybitniejszymi młodymi pianistami z całego świata. Wcześniej, bo w lipcu, będzie on reprezentować Polskę na LVI Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Tajlandii. Obu sukcesów serdecznie gratulujemy i życzymy podwójnego połamania — długopisu w Tajlandii i palców w Warszawie!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Wiatraczek

5". *Odpowiedź:* Tak. Oznacz na odcinku AB takie punkty K, F, a na odcinku AC taki punkt L, że

$$\frac{AF}{BF}=\frac12 \quad\text{oraz}\quad \frac{BK}{AK}=\frac{CL}{AL}=\frac13.$$

Następnie zdefiniuj P jako punkt przecięcia prostych KL i CF. Uzasadnij, że dla tak wybranego punktu P trójkąty AFP i BDP mają równe pola.

6. Korzystając z zadania **5'**, uzasadnij, że co najmniej jeden z punktów przecięcia prostych AP, BP, CP, DP z przeciwległymi ścianami jest środkiem ciężkości ściany. Następnie zauważ, że wówczas 24 małe czworościany łączą się w szóstki czworościanów o równych objętościach, a 9 nie jest wielokrotnością liczby 6.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.