Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Nr 23
wrzesień 2019
ISSN 2300-0708

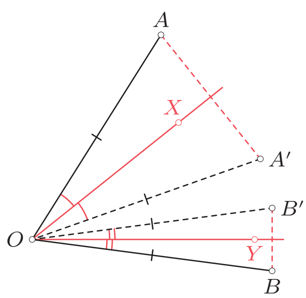
Zaginamy

Rozpatrzmy odcinki OA, OB o równej długości tworzące kąt o mierze α, wewnątrz którego znajduje się kąt XOY o mierze β. Ustalmy oznaczenia w taki sposób, by odcinki OA, OX, OY, OB były ustawione w tej właśnie kolejności wokół punktu O (rys. 1).

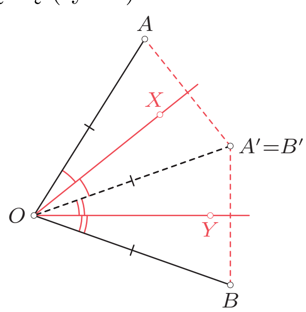
Jeśli przez A', B' oznaczymy obrazy odpowiednio punktów A, B w symetriach względem prostych OX, OY, to wówczas $OA = OA'$ oraz $OB = OB'$ i w konsekwencji $OA' = OB'$. Ponadto, jeśli $2\beta \geqslant \alpha$, to

$$\begin{aligned}\sphericalangle A'OB' &= \sphericalangle XOY - (\sphericalangle XOA' + \sphericalangle YOB') = \\ &= \sphericalangle XOY - (\sphericalangle XOA + \sphericalangle YOB) = \\ &= \beta - (\alpha - \beta) = 2\beta - \alpha .\end{aligned}$$

Z rachunku tego wynika w szczególności, że jeśli $\alpha = 2\beta$, to punkty A' i B' pokrywają się (rys. 2).



rys. 1



rys. 2

Zobaczmy, jak „zagięcie” punktów A, B do wnętrza kąta XOY może pomóc w rozwiązaniu zadań.

Zadanie 1.

Dany jest kwadrat $ABCD$ (rys. 3). Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CD, przy czym $\sphericalangle EAF = 45°$. Udowodnij, że $BE + DF = EF$.

Rozwiązanie

W naszej konfiguracji rolę odcinków OA i OB pełnią odcinki AB i AD, tworzące kąt o mierze $\alpha = 90°$. Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt EAF o mierze $\beta = 45°$.

Odbijmy więc punkty B, D symetrycznie względem prostych AE, AF, uzyskując odpowiednio punkty B', D'. Ponieważ $\alpha = 2\beta$, więc punkty B' i D' pokrywają się z pewnym punktem X. Ponadto

$$\sphericalangle AXE + \sphericalangle AXF = \sphericalangle ABE + \sphericalangle ADF = 90° + 90° = 180°,$$

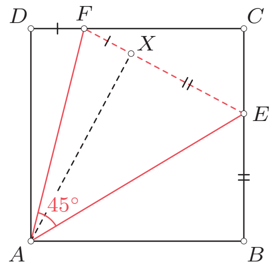
skąd wniosek, że punkt X leży na odcinku EF. Zatem

$$BE + DF = XE + XF = EF,$$

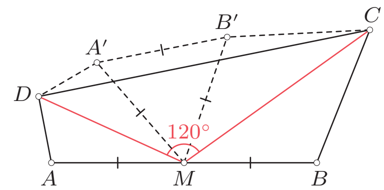
co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle CMD = 120°$ (rys. 4). Udowodnij, że $DA + \frac{1}{2}AB + BC \geqslant DC$.



rys. 3



rys. 4

Rozwiązanie

Rolę odcinków OA i OB pełnią teraz odcinki MA i MB wyznaczające kąt $\alpha = 180°$. Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt CMD o mierze $\beta = 120°$.

Odbijmy zatem punkty A, B symetrycznie kolejno względem prostych DM, CM, uzyskując odpowiednio punkty A', B'. Wówczas $MA' = MB'$ oraz

$$\sphericalangle A'MB' = 2\beta - \alpha = 240° - 180° = 60° .$$

Wobec tego trójkąt $MA'B'$ jest równoboczny. W szczególności $A'B' = MA' = MA = \frac{1}{2}AB$. W związku z tym

$$DA + \tfrac{1}{2}AB + BC = DA' + A'B' + B'C \geqslant DC ,$$

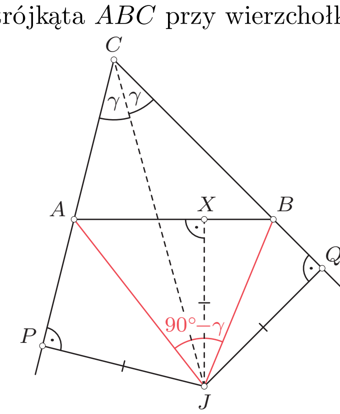
co kończy dowód.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Punkt J leży na dwusiecznej kąta ACB oraz na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym spełniony jest warunek

$$\sphericalangle AJB = 90° - \gamma .$$

Wykaż, że punkt J leży na dwusiecznych kątów zewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B.



rys. 5

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktu J odpowiednio na proste AC i BC (rys. 5). Ponadto $\sphericalangle AJC < \sphericalangle AJB = 90° - \gamma$, skąd wynika, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle CAJ &= 180° - \sphericalangle ACJ - \sphericalangle AJC > \\ &> 180° - \gamma - (90° - \gamma) = 90° .\end{aligned}$$

Podobnie, $\sphericalangle CBJ > 90°$. Stąd wniosek, że punkty P i Q leżą na przedłużeniach boków AC i BC.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
mFundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Ponieważ punkt J leży na dwusiecznej kąta ACB, więc odcinki PJ oraz QJ są równej długości i tworzą kąt PJQ o mierze

$$\alpha=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+\sphericalangle ACB)=180^\circ-2\gamma\,.$$

Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt AJB o mierze

$$\beta=90^\circ-\gamma\,.$$

Zauważmy, że $\alpha=2\beta$. W związku z tym obrazy symetryczne punktów P i Q odpowiednio względem prostych AJ i BJ pokrywają się z pewnym punktem X. Ponadto

$$\sphericalangle AXJ+\sphericalangle BXJ=\sphericalangle APJ+\sphericalangle BQJ=90^\circ+90^\circ=180^\circ\,,$$

skąd wniosek, że punkt X leży na odcinku AB, a odcinek JX jest prostopadły do prostej AB.

Odległość punktu J od prostej AB jest równa długości odcinka JX, a ta z kolei równa się wspólnej długości odcinków JP i JQ. Stąd wniosek, że punkt J leży na dwusiecznych kątów zewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B, co kończy dowód.

Oznaczmy przez r wspólną długość odcinków JP, JQ, JX. Wówczas okrąg o środku J i promieniu r leży na zewnątrz trójkąta i jest styczny do prostych zawierających boki tego trójkąta. Okrąg taki nazywamy *okręgiem dopisanym do trójkąta ABC*.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy jak zwykle w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt M jest środkiem boku AB, przy czym $\sphericalangle CMD=90^\circ$. Wykaż, że $BC+DA\geqslant CD$.

Zadanie 5.
Dany jest romb $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle EAF=\frac{1}{2}\sphericalangle BAD=\alpha$. Udowodnij, że z odcinków o długościach BE, DF oraz EF można zbudować trójkąt oraz że miara jednego z kątów tego trójkąta jest równa 4α.

Zadanie 6.
Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD=120^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym $BE=CF$. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że z odcinków o długościach BP, PQ i QD można zbudować trójkąt oraz miara jednego z kątów tego trójkąta wynosi 60°.

Zadanie 7. (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $\sphericalangle DME=60^\circ$. Wykaż, że

$$AD+BE=DE+\tfrac{1}{2}AB\,.$$

Waldemar Pompe

Teoria cyfr

Każda liczba całkowita przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jak suma jej cyfr. Ta ogólna, dobrze znana cecha podzielności pokazuje, że cyfry nie są tylko znakami graficznymi służącymi do zapisu liczby, ale mają także znaczenie matematyczne. Mówiąc, że liczba całkowita dodatnia a w systemie dziesiętnym jest zapisana za pomocą cyfr $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$, co oznaczamy $a=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1}$, mamy na myśli równość

$$a=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_2\cdot 10+a_1\,.$$

Zadanie 1.
Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która ma tę własność, że po dopisaniu takiej samej cyfry na jej początku i końcu otrzymamy liczbę 29 razy większą od wyjściowej.

Rozwiązanie
Niech $a=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1}$ będzie szukaną liczbą. Jeśli przez c oznaczymy pierwszą (i jednocześnie ostatnią) cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby $29a$, to z założeń zadania otrzymamy

$$\begin{aligned}29a&=\overline{ca_na_{n-1}\ldots a_1c}=\\&=c\cdot 10^{n+1}+a_n\cdot 10^n+\ldots+a_1\cdot 10^1+c=\\&=c\cdot 10^{n+1}+(a_n\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1)\cdot 10+c=\\&=c\cdot 10^{n+1}+a\cdot 10+c.\end{aligned}$$

Równość tę możemy zapisać w równoważnej postaci

$$19a=c\cdot(10^{n+1}+1).$$

Ponieważ 19 jest liczbą pierwszą, więc musi ona dzielić jeden z czynników po prawej stronie równości. Z pewnością nie jest to jednak c, które jest (niezerową) cyfrą, zatem $19\mid 10^{n+1}+1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że najmniejszą liczbą n o tej własności jest 8. Wówczas $10^{n+1}+1=19\cdot 52631579$, skąd wynika $a=52631579\cdot c$. Przyjmując $c=1$, uzyskujemy najmniejszą liczbę spełniającą warunki zadania: $a=52631579$. To kończy rozwiązanie.

Zadanie 2.
Pewna liczba całkowita dodatnia zaczyna się cyfrą 1. Jeśli cyfrę tę przestawimy na koniec, to liczba zwiększy się trzykrotnie. Jaka jest najmniejsza liczba o tej własności?

Rozwiązanie
Zadanie to można rozwiązać bardzo podobnie do poprzedniego. Tu zastosujemy jednak inną, algorytmiczną metodę wyznaczenia rozwiązania.

Niech $a=\overline{1\ldots a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ będzie szukaną liczbą. Z treści zadania wynika równość

$$3\cdot\overline{1\ldots a_6a_5a_4a_3a_2a_1}=\overline{\ldots a_5a_4a_3a_2a_11}.$$

Ponieważ dalsze rozumowanie będzie w pewnym sensie „odwróceniem” dobrze znanego ze szkoły algorytmu pisemnego mnożenia, zapiszmy to działanie w postaci

$$\begin{array}{r}1\ldots\ a_6\,a_5\,a_4\,a_3\,a_2\,a_1\\ \cdot\qquad\qquad\qquad 3\\ \hline \ldots\ a_5\,a_4\,a_3\,a_2\,a_1\ 1\end{array}$$

Na początku znajdziemy cyfrę a_1 taką, że ostatnią cyfrą iloczynu $3a_1$ jest 1. W języku kongruencji oznacza to $3a_1\equiv 1 \pmod{10}$. Mnożąc obie strony przez 7, otrzymujemy $21a_1\equiv 7 \pmod{10}$, co jest równoważne $a_1\equiv 7 \pmod{10}$, czyli $a_1=7$. Możemy więc wykonać pierwszy krok pisemnego mnożenia:

$$\begin{array}{r}{\scriptstyle 2}\ \\ 1\ldots\ a_6\,a_5\,a_4\,a_3\,a_2\,7\\ \cdot\qquad\qquad\qquad 3\\ \hline \ldots\ a_5\,a_4\,a_3\,a_2\ 7\ 1\end{array}$$

Teraz szukamy cyfry a_2 takiej, że $3a_2+2\equiv 7 \pmod{10}$, czyli $3a_2\equiv 5 \pmod{10}$. Znów mnożąc obie strony przez 7, otrzymujemy $a_2\equiv 5 \pmod{10}$, czyli $a_2=5$, co pozwala nam wykonać następny krok pisemnego mnożenia:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 2\ \ } \\ 1\ldots a_6\,a_5\,a_4\,a_3\,5\,7 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots a_5\,a_4\,a_3\,5\;7\;1 \end{array}$$

Rozumując analogicznie, po kolejnych czterech krokach otrzymamy

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ \ 2\,1\,2\ \ } \\ \ldots 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \cdot \qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots 1\,4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Uzyskaliśmy $a_6=1$, a więc 142857 jest najmniejszą liczbą o zadanych własnościach. To kończy rozwiązanie zadania.

Poniżej proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.

Z cyfr $1,2,\ldots,8$ utworzono dwie liczby 4-cyfrowe, wykorzystując każdą cyfrę dokładnie raz. Wykaż, że suma uzyskanych liczb jest podzielna przez 9.

Zadanie 4.

Czy można z cyfr $1,2,\ldots,6$, wykorzystując każdą dokładnie raz, utworzyć liczbę sześciocyfrową podzielną przez 11?

Zadanie 5.

Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które po dowolnej zmianie kolejności cyfr dają liczbę podzielną przez 27.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe, które zwiększą się 6 razy, gdy ostatnie trzy cyfry przestawi się na początek, nie zmieniając ich kolejności.

Zadanie 7.

Liczbę pięciocyfrową, która ma wszystkie cyfry różne, pomnożono przez 4. W wyniku otrzymano wyjściową liczbę zapisaną wspak. Jaka to liczba?

Zadanie 8. (XX OM, zawody II stopnia)

Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe, w których cyfra tysięcy jest równa cyfrze setek, a cyfra dziesiątek — cyfrze jedności i które są kwadratami liczb całkowitych.

Bartłomiej Zawalski

Wietnamskie zawody matematyczne

W dniach 2–6 kwietnia 2019 r. w Wietnamie odbyły się zawody *16th Hanoi Open Mathematics Competition* (HOMC). Polskę reprezentowali:

- Jakub Izdebski (SP nr 5, Grodzisk Mazowiecki),
- Michał Mańka (SP nr 65, Katowice),
- Gabriela Pietras (Publiczna SP, Leszczyna),
- Natalia Siwek (Społeczna SP nr 2, Poznań),
- Konstanty Smolira (Dwujęzyczna SP *Europejczyk*, Lublin),
- Mateusz Wójcicki (SP nr 2, Piotrków Trybunalski).

Reprezentacja została wyłoniona spośród uczniów szkół podstawowych na podstawie wyników zawodów II stopnia XIV Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Opiekunem polskiej drużyny był Waldemar Rożek, a przewodniczącą polskiej delegacji — Dominika Regiec.

Była to już szesnasta edycja konkursu, jednak dopiero po raz drugi organizatorzy zaprosili do uczestnictwa delegacje spoza Wietnamu. W tym roku w zawodach wzięły udział reprezentacje następujących czternastu krajów: Birmy, Chin, Filipin, Hiszpanii, Indonezji, Iranu, Malezji, Nepalu, Polski, Tajlandii, Tajwanu, Węgier, Wietnamu i Zjednoczonych Emiratów Arabskich.

Konkurs odbywał się w dwóch kategoriach wiekowych: Junior (7–8 rok edukacji) oraz Senior (9–10 rok edukacji). Każdy kraj reprezentowały maksymalnie dwie drużyny (po jednej z każdej kategorii) składające się najwyżej z sześciu zawodników, przy czym gospodarze mieli przywilej wystawienia dwóch drużyn w każdej kategorii. W ubiegłym roku Polska uczestniczyła tylko w kategorii Senior; w tym roku reprezentanci naszego kraju rywalizowali jedynie w kategorii Junior.

W obu kategoriach wiekowych odbywają się zawody indywidualne oraz drużynowe. W trakcie zawodów indywidualnych uczestnicy mierzą się z piętnastoma zadaniami. Pięć z nich to zadania testowe jednokrotnego wyboru (każde warte 5 punktów). Kolejne pięć to tzw. *zadania krótkiej odpowiedzi* (po 10 punktów). Tutaj, w odróżnieniu od pytań testowych, nie są sugerowane odpowiedzi liczbowe. Uczestnicy muszą więc sami wyprowadzić i podać poprawny wynik liczbowy, przy czym nie przedstawiają rozumowania, które do niego doprowadziło. Pozostałe pięć zadań to *zadania rozwiniętej odpowiedzi*, a więc takie, w których należy podać pełne rozumowanie (po 15 punktów). Na rozwiązanie tych piętnastu zadań uczestnicy mają zaledwie dwie godziny. W tak krótkim czasie niezwykle trudno jest rozwiązać wszystkie zadania, dlatego oprócz umiejętności matematycznych kluczowy jest też wybór odpowiedniej strategii.

W całej 16-letniej historii indywidualnych zawodów HOMC, maksymalna suma punktów została osiągnięta tylko raz i to w kategorii Senior. Ten spektakularny wynik uzyskał *Radosław Żak*, ubiegłoroczny reprezentant Polski, wówczas uczeń Katolickiego Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie.

Właściwa taktyka odgrywa jeszcze większą rolę w trakcie zawodów drużynowych. Do drużyny wybranych zostaje czworo uczestników z danego kraju. Początkowo każda drużyna otrzymuje osiem zadań, z których cztery to zadania testowe (każde warte 5 punktów), a cztery pozostałe to zadania krótkiej odpowiedzi (po 10 punktów). Zawodnicy mają dziesięć minut na naradę, jednak nie mogą korzystać z przyborów do pisania. Muszą w tym czasie rozdzielić między siebie zadania, po dwa dla każdego.

Następnie przez kolejne 20 minut uczestnicy pracują niezależnie nad przydzielonymi zadaniami. Po upływie tego czasu oddają przygotowane rozwiązania. Drużyna ponownie spotyka się i otrzymuje dwa zadania rozwiniętej odpowiedzi, które rozwiązuje zespołowo w czasie 30 minut. Taka formuła zawodów zapewniła ogromną dawkę emocji i radości ze wspólnego rozwiązywania problemów matematycznych.

W zawodach indywidualnych w kategorii Junior przyznano 9 złotych, 17 srebrnych i 26 brązowych medali. Zwyciężył reprezentant Tajlandii Sarunyu Thongharast. Czworo Polaków wróciło do kraju z brązowymi medalami, byli to: Gabriela, Natalia, Konstanty i Michał.

W zawodach drużynowych w kategorii Junior zwyciężyła reprezentacja Chin, uzyskując maksymalną sumę punktów. Drugie miejsce zajęła drużyna Wietnamu.

Warto tu wspomnieć, że program nauczania matematyki uczniów szkół podstawowych jest w krajach azjatyckich znacznie obszerniejszy niż w Polsce. Uczniowie z Azji już w ósmym roku edukacji posługują się metodami związanymi z funkcją kwadratową i wielomianami.

Zestawy zadań zostały przygotowane przez komisję złożoną z matematyków z Wietnamu w oparciu o propozycje nadesłane przez uczestniczące kraje. Cztery zadania wybrane na zawody były zaproponowane przez Polskę — autorem dwóch był Tomasz Przybyłowski, dwa inne były natomiast modyfikacją propozycji Łukasza Bożyka i Dominiki Regiec.

Jednym z celów konkursu jest także wymiana doświadczeń i zawarcie znajomości z rówieśnikami z innych krajów. Sprzyjały temu wycieczki, w trakcie których uczestnicy mogli poznać zwyczaje i historię Wietnamu, jak również gala kulturowa, podczas której każda drużyna zaprezentowała krótkie wystąpienie nawiązujące do tradycji swojego kraju. Pomysły były różne — można było poznać narodowe tańce, śpiewy i obrzędy. Polacy przygotowali krótkie skecze przybliżające postaci i momenty ważne dla polskiej nauki i w szczególności dla matematyki.

Przedstawimy trzy przykładowe zadania, z którymi mierzyli się uczestnicy, po jednym z każdego typu.

Zadanie 1. (Junior, ind., testowe)

Ile niepustych *spójnych podciągów* (tj. złożonych z następujących po sobie elementów) zawiera ciąg $1,2,3,\ldots,99,100$?

A. 1010 **B.** 2020 **C.** 3030 **D.** 4040 **E.** 5050

Rozwiązanie

Odpowiedź: **E**.

Dla $n=1,2,\ldots,100$ istnieje dokładnie n spójnych podciągów kończących się w n, toteż wszystkich takich podciągów jest $1+2+3+\ldots+99+100=5050$.

Zadanie 2. (Junior, ind., krótkiej odpowiedzi)

Niech p, q będą nieparzystymi liczbami pierwszymi. Załóżmy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $pq-1=n^3$. Wyznacz wartość $p+q$ w zależności od n.

Rozwiązanie

Odpowiedź: n^2+2.

Na mocy założenia, $pq=n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$. Ponieważ $p,q\geqslant 3$, więc $n\geqslant 2$, skąd $n+1, n^2-n+1>1$. Wobec tego na mocy pierwszości p, q, jedna z liczb p, q musi być równa $n+1$, natomiast druga n^2-n+1. Toteż ich suma wynosi n^2+2.

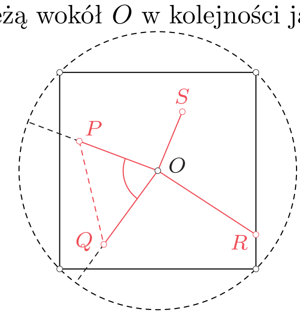
Zadanie 3. (Senior, ind., rozwiniętej odpowiedzi)

We wnętrzu lub na brzegu kwadratu o boku długości 1 zaznaczono cztery punkty. Wykaż, że pewne dwa z nich są odległe o co najwyżej 1.

Rozwiązanie

Niech O będzie środkiem kwadratu. Jeśli jeden z zaznaczonych punktów pokrywa się z punktem O, to teza jest natychmiastowa — wszystkie punkty kwadratu są zawarte w kole o środku O i o promieniu $r=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$.

Załóżmy więc, że żaden z zaznaczonych punktów P, Q, R, S nie pokrywa się z punktem O i dorysujmy odcinki OP, OQ, OR, OS. Bez straty ogólności załóżmy, że odcinki te leżą wokół O w kolejności jak na rysunku.



rys. 6

Wówczas $\sphericalangle POQ+\sphericalangle QOR+\sphericalangle ROS+\sphericalangle SOP=360^\circ$ oraz miary tych kątów są nieujemne. Wobec tego któryś z nich wynosi co najwyżej 90°; przyjmijmy, że jest to kąt POQ. Ale wtedy $PQ^2\leqslant PO^2+QO^2\leqslant r^2+r^2=1$, czyli $PQ\leqslant 1$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 1 jest modyfikacją propozycji Łukasza Bożyka: Jaka jest średnia suma elementów spójnego podciągu ciągu $1,2,3,\ldots,99,100$?

Z kolei zadanie 2 to modyfikacja zadania zaproponowanego przez Dominikę Regiec; w oryginalnym sformułowaniu warunkiem wiążącym p, q, n był $pq-4=n^4$.

Polskie akcenty posiada także zadanie 3. Jego autorem jest Do Minh Khoa, absolwent Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, a powyższe rozwiązanie zaproponował Hung Son Nguyen, profesor wspomnianej warszawskiej uczelni.

Dominika Regiec

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Objętość ostrosłupa

4. *Odpowiedź:* 64 *i* 48. Oznacz przez A'', B'', C'', D'' punkty będące obrazami odpowiednio punktów C, D, A, B w symetrii względem środka odcinka KM. Uzasadnij, że $ABCDA''B''C''D''$ jest prostopadłościanem oraz że płaszczyzna przechodząca przez punkty K, L, M rozcina go na dwie przystające bryły.

5. *Odpowiedź:* 75 *i* 141. Oznacz przez X, Y punkty przecięcia prostej KL odpowiednio z prostymi $A'B'$ oraz $A'D'$. Wówczas jedna z brył, których objętości szukamy powstaje z ostrosłupa $XYA'A$ poprzez odcięcie dwóch innych ostrosłupów.

6. *Odpowiedź:* 45. Oblicz najpierw objętość bryły o wierzchołkach A, K, L, A', B', D'. W tym celu przedłuż odcinki $B'K$ i $D'L$ do przecięcia z przedłużeniem krawędzi AA'.

7. *Odpowiedź:* $a^3/4$. Oznacz przez L środek krawędzi $A'B'$. Rozumując podobnie do rozwiązania zadania 3, uzasadnij, że objętość czworościanu $ACKD'$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $AKLD'$.

Parzystość

7. *Odpowiedź: Nie.* Naśladuj rozwiązanie zadania 1.

8. *Odpowiedź: Nie.* Wykaż, że po wykonaniu ruchu suma wszystkich liczb nie zmienia parzystości.

9. Zauważ, że każdy t-klocek pokrywa nieparzystą liczbę czarnych pól, a każdy ℓ-klocek — dokładnie dwa czarne pola.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.