Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
26 września 2026 r.

Rozumowanie od końca

Zadanie 1 (*Matematyczne Gwiazdki*, J. i J. Bednarczuk, zad. 25)**.** *Krasnolud Yurrek Foorp znalazł maszynę do pomnażania złota. W ciągu każdej godziny z każdej złotej monety powstają dwie. Gdyby Yurrek umieścił w pustej szufladzie maszyny jedną monetę, szuflada zapełniłaby się w ciągu połowy doby. Yurrek wkłada jednak od razu dwie monety. Po jakim czasie szuflada się zapełni?*

Zadanie 2 (Folklor)**.** *Dwa jednakowe puchary zostały wypełnione tą samą objętością płynów: lewy puchar wodą, a prawy puchar winem. Zaczerpnięto kieliszkiem wina z prawego pucharu i wlano je do lewego. Następnie tym samym kieliszkiem zaczerpnięto płynu z lewego pucharu i wlano go do prawego. Czy w rezultacie w lewym pucharze jest więcej wina niż w prawym wody?*

Zadanie 3 (*Matematyka bez formuł*, Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, zad. 132, treść zmodyfikowana)**.** *Ania i Jacek rozpoczynają grę od sumy równej* 0*. Na przemian dodają do niej jedną z liczb* $1, 2, \ldots, 10$*, przy czym zabronione jest przekroczenie* 100*. Rozpoczyna Ania, a wygrywa osoba, która jako pierwsza otrzyma sumę 100. Kto ma strategię wygrywającą?*

Zadanie 4 (AMC 10A 2011, zad. 23)**.** *Siedmioro uczniów rozdziela między siebie liczby od* 1 *do* 1000*. Alicja wypowiada wszystkie liczby z wyjątkiem środkowej w każdej kolejnej trójce: mówi więc* $1, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots$ *Barbara stosuje tę samą regułę do liczb pominiętych przez Alicję. Następnie analogicznie postępują kolejno Candice, Debbie, Eliza i Fatima. George wypowiada jedyną liczbę, której nie wypowiedział nikt z pozostałej szóstki. Jaka to liczba?*

Zadanie 5 (*Matematyczne Gwiazdki*, J. i J. Bednarczuk, zad. 44)**.** *Czarodziejska skarbonka każdej nocy zmienia liczbę znajdujących się w niej monet. Jeśli monet jest parzyście wiele, dodaje jedną monetę, a jeśli nieparzyście wiele, podwaja ich liczbę. Gapcio chce wrzucić monety do pustej skarbonki tak, aby w piątek rano było w niej dokładnie* 87 *monet. Ile monet powinien wrzucić najmniej i którego dnia?*

Zadanie 6 (Folklor)**.** *Jak można odmierzyć nad rzeką dokładnie sześć litrów wody, mając tylko dwa nieoznakowane naczynia: czterolitrowe i dziewięciolitrowe? Naczynia można napełniać, opróżniać oraz przelewać wodę z jednego do drugiego aż do opróżnienia pierwszego albo napełnienia drugiego.*

Zadanie 7 (Olimpiada w Danii, 2021, pierwszy etap, zad. 5)**.** *Na tablicy znajduje się liczba* 1*. Ruch polega na zastąpieniu aktualnej liczby liczbą dwa razy większą albo o jeden mniejszą. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebna do otrzymania liczby* 2021*?*

Zadanie 8 (XVI OMJ, zawody stopnia pierwszego, zad. 1)**.** *Czy istnieje liczba sześciocyfrowa, której każde dwie kolejne cyfry tworzą dwucyfrową liczbę będącą kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 9 (XVIII OMJ, zawody stopnia drugiego, zad. 2)**.** *Początkowo na tablicy są zapisane liczby* 2 *oraz* 5*. W jednym ruchu wybiera się jedną z nich i zastępuje sumą obu liczb znajdujących się aktualnie na tablicy. Czy po pewnej liczbie ruchów można otrzymać dwie kolejne liczby naturalne? Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 10 (XXI OMJ, zawody stopnia drugiego, zad. 3)**.** *Pola planszy* 1×100 *są ponumerowane kolejno liczbami od* 1 *do* 100*. Pionek początkowo stoi na polu* n*. W pierwszym ruchu przesuwa się o jedno pole, w drugim o dwa pola, w trzecim o trzy pola i tak dalej. Po* 99 *ruchach pionek odwiedził każde pole dokładnie raz. Wyznacz wszystkie możliwe wartości* n*.*

Zadanie 11 (Náboj 2016, zad. 31)**.** *Mamy sześć pudełek ponumerowanych liczbami od* 1 *do* 6*. Rozdzielono między nie* 17 *brzoskwiń. Dozwolony jest następujący ruch: jeżeli w pudełku numer* n *znajduje się dokładnie* n *brzoskwiń, to jedną z nich zjadamy, a pozostałe* $n-1$ *przekładamy po jednej do pudełek o numerach* $1, 2, \ldots, n-1$*. Wyznacz początkowy rozkład brzoskwiń, jeżeli wiadomo, że można w ten sposób zjeść wszystkie.*

Zadanie 12 (Austriacka Olimpiada Matematyczna 2016, zawody regionalne, zad. 3)**.** *Na tablicy zapisano liczby* 47 *i* 2016*. Alicja i Bob wykonują ruchy na przemian; rozpoczyna Alicja. W ruchu wybiera się dwie zapisane liczby* $a > b$*, których różnica* $a - b$ *nie występuje jeszcze na tablicy, i dopisuje się tę różnicę. Gra kończy się, gdy nie można wykonać ruchu. Wygrywa osoba wykonująca ostatni ruch. Udowodnij, że niezależnie od przebiegu gry wygrywa Bob.*

Zadanie 13 (Finał Holenderskiej Olimpiady Matematycznej 2019, zad. 5(a))**.** *Na stole leżą odkryte karty ponumerowane liczbami* $1, 2, \ldots, 2018$*. Thomas i Nils wykonują ruchy na przemian, przy czym rozpoczyna Thomas. W swoim ruchu gracz wybiera jedną z kart pozostających na stole i decyduje, czy zatrzyma ją dla siebie, czy przekaże przeciwnikowi. Po zabraniu wszystkich kart każdy gracz sumuje liczby na swoich kartach. Jeżeli różnica tych sum jest podzielna przez* 3*, wygrywa Thomas; w przeciwnym razie wygrywa Nils. Udowodnij, że Nils może zapewnić sobie zwycięstwo.*

Zadanie 14 (AIME I 2000, zad. 15)**.** *W talii znajduje się* 2000 *kart oznaczonych liczbami od* 1 *do* 2000*, ustawionych początkowo w pewnej kolejności. Powtarzamy operację: zdejmujemy kartę z wierzchu i kładziemy ją na stole, a następną kartę z wierzchu przekładamy na spód talii. Gdy talia się wyczerpała, na stole leżały kolejno karty z numerami* $1, 2, 3, \ldots, 2000$*. Ile kart znajdowało się początkowo nad kartą z numerem* 1999*?*

Zadanie 15 (Olimpiada w Austrii, 2025, etap wstępny)**.** *Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej* n *rozważamy następującą grę. Początkowo na tablicy zapisane są liczby* $1, 2, \ldots, n$*. W każdym kroku wybieramy dwie liczby, których dodatnia różnica również jest zapisana na tablicy, a następnie tę różnicę zmazujemy. Dla jakich* n *można doprowadzić do sytuacji, w której na tablicy pozostanie tylko jedna liczba?*

Zadanie 16 (European Mathematical Cup 2024, kategoria Junior, zad. 1)**.** *Wiske zapisała na tablicy dodatnią liczbę mającą* 2024 *cyfry. W każdej rundzie ścierała ostatnią cyfrę* d *aktualnej liczby i zamiast starej liczby zapisywała sumę liczby utworzonej przez pozostałe cyfry oraz* $2d$*. Operację powtarzała, aż po raz pierwszy otrzymała tę samą liczbę, która była na tablicy bezpośrednio przed wykonaniem operacji. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę początkową.*

Zadanie 17 (LXXII Olimpiada Matematyczna, zawody stopnia drugiego, zad. 1)**.** *Jacek ma* n *kart ponumerowanych kolejno liczbami* $1, 2, \ldots, n$*, które układa na stole w rzędzie, w dowolnie wybranej kolejności. Następnie zdejmuje karty w kolejności zgodnej z ich numeracją: najpierw kartę numer* 1*, potem kartę numer* 2 *i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek koloruje każdą z nich na czerwono, niebiesko albo żółto. Udowodnij, że Placek może pokolorować karty tak, aby podczas zdejmowania kart w każdym momencie pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajdowała się co najmniej jedna karta innego koloru.*

Zadanie 18 (Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 1993, zad. 6(a))**.** *Na okręgu rozmieszczono* $n > 1$ *lamp* $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$*. Przechodzimy kolejno przez lampy* $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}, L_0, L_1, \ldots$*; lampą poprzedzającą* L_0 *jest* L_{n-1}*. Każda lampa jest zapalona albo zgaszona. Początkowo wszystkie lampy są zapalone. Gdy przychodzi kolej na pewną lampę, zmieniamy jej stan wtedy i tylko wtedy, gdy lampa bezpośrednio ją poprzedzająca jest zapalona. Udowodnij, że po dodatniej liczbie kroków wszystkie lampy będą ponownie zapalone.*