STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy OMG

Poziom OM
27–31 maja 2013

www.omg.edu.pl

Warszawa, lipiec 2013 r.

Wydanie pilotażowe (niepoprawione)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równanie

$$(a+b+c)^n = abc.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f prawdziwa jest nierówność

$$a^3b^5 + b^3c^5 + c^3d^5 + d^3e^5 + e^3f^5 + f^3a^5 \leqslant a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8.$$

3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których istnieje taka nieujemna liczba całkowita k, że liczba $n!$ jest podzielna przez 3^k, ale nie jest podzielna przez 4^k.

4. Udowodnij, że istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której równanie

$$n^2 + n + k = m^2$$

ma więcej niż 2013 rozwiązań w nieujemnych liczbach całkowitych m, n.

5. Czy sześcian o krawędzi 7 można podzielić na 171 prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ oraz jeden sześcian jednostkowy tak, aby sześcian jednostkowy zawierał punkt przecięcia przekątnych dużego sześcianu?

6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$. Wykaż, że

$$[BDF] = \frac{1}{2}[ABCDEF]\,,$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC, punkty R i S są rzutami prostokątnymi odpowiednio A i B na prostą PQ. Wykaż, że $PR=QS$.

8. W ostrosłupie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę ABC. Udowodnij, że punkt T jest ortocentrum trójkąta ABC.

Drugie zawody indywidualne

9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^{2013}=b+b^{2013} \\ b^{2013}=c+c^{2013} \\ c^{2013}=d+d^{2013} \\ d^{2013}=e+e^{2013} \\ e^{2013}=a+a^{2013} \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e.

10. Udowodnij, że równanie

$$(a-b)^9=a^4b^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b.

11. Na płaszczyźnie wybrano 4026 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Następnie 2013 z tych punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe 2013 punktów na niebiesko. Udowodnij, że można te punkty tak połączyć 2013 odcinkami w pary, aby każdy z odcinków miał na końcach punkty różnych kolorów i aby przy tym żadne dwa odcinki się nie przecinały.

12. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q są ortocentrami trójkątów ABC i ABD. Wykaż, że $CD=PQ$.

Trzecie zawody indywidualne

13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n.$$

14. Dana jest liczba pierwsza $p>2$. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba 2^n-n jest podzielna przez p.

15. Niech o będzie okręgiem opisanym na prostokącie $ABCD$, punkt L punktem na tym łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktu A. Proste AL i DC przecinają się w punkcie K, proste AD i CL przecinają się w punkcie M, proste MK i BC przecinają się w punkcie N. Udowodnij, że punkty M, L, N, B leżą na jednym okręgu.

16. Podstawą ostrosłupa $SABCD$ jest równoległobok $ABCD$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu O leżącego wewnątrz tego ostrosłupa prawdziwa jest równość

$$V_{OSAB}+V_{OSCD}=V_{OSBC}+V_{OSDA},$$

gdzie V_{XYZT} oznacza objętość czworościanu $XYZT$.

Czwarte zawody indywidualne

17. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0\,.$$

Wykaż, że

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \geqslant 4abcd.$$

18. Udowodnij, że równanie

$$a^3+b^3+2=c^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

19. Czy istnieje sześcian o krawędzi długości niecałkowitej, którego powierzchnię można okleić prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×6 ?

Uwaga: Każdy pasek papieru musi być przyklejony całą swoją powierzchnią do sześcianu (niekoniecznie do jednej ściany). Pasków papieru nie można rozdzierać, nie można naklejać jednego paska na drugi, ani nie można sklejać paska samego ze sobą.

20. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle DAQ=\sphericalangle BAC$, to $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ABP$.

21. Okręgi o_1, o_2, o_3 o promieniach odpowiednio $r_1>r_2>r_3$ są parami styczne wewnętrznie w punkcie K. Punkty A, B, C leżą na okręgu o_1, przy czym odcinek AB jest styczny do okręgu o_2 w punkcie P, a odcinek BC jest styczny do okręgu o_3 w punkcie Q. Prosta PQ przecina drugi raz okrąg o_3 w punkcie R. Udowodnij, że prosta AR jest styczna do okręgu o_3.

Mecz matematyczny

22. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$\left[m\sqrt{10}\right]=\left[n\sqrt{10}\right]+2m+4n$$

w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Uwaga: Zapis $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

23. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz=x^4+y^4+z^4+1. \end{cases}$$

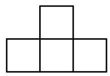
24. Udowodnij, że równanie

$$(a+b+c)^2 = abc$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

25. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, liczba n^2+n+k nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100.

26. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że szachownicę o boku n daje się rozciąć na kostki tetromina o polu 4 i kształcie jak na poniższym rysunku.



27. Klockiem nazwiemy bryłę powstałą z doklejenia sześcianów jednostkowych do trzech parami sąsiednich ścian sześcianu jednostkowego. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że prostopadłościan o wymiarach $2013 \times 2013 \times n$ daje się zbudować z klocków?

28. Udowodnij, że istnieje liczba naturalna m o następującej własności: każda liczba naturalna $n \geqslant m$ ma taką wielokrotność mniejszą od $n\sqrt[3]{n^2}$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 5.

29. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie L. Punkt K jest obrazem symetrycznym punktu L względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykaż, że $BK \geqslant HL$.

30. Dany jest kwadrat $ABCD$. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne KLM, że punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD. Wyznacz zbiór środków wszystkich odcinków KL.

31. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Punkty X i Y są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Prosta XY przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PCQ jest równoramienny.

32. Dany jest czworościan, w którym wszystkie ściany są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnij, że można w taki sposób wybrać dwie przeciwległe krawędzie tego czworościanu, aby czworościan zawierał się w sumie kul, których średnicami są te krawędzie.

Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie **1.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równanie
$$(a+b+c)^n = abc.$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy $b=2a$ oraz $c=3a$. Wówczas dane w zadaniu równanie przyjmuje postać
$$6^n \cdot a^n = 6 \cdot a^3,$$
skąd $a^{3-n} = 6^{n-1}$. W przypadku, gdy $n \neq 3$, wystarczy przyjąć
$$a = 6^{(n-1)/(3-n)}$$
i konsekwentnie
$$b = 2 \cdot 6^{(n-1)/(3-n)} \quad \text{oraz} \quad c = 3 \cdot 6^{(n-1)/(3-n)}.$$
Dane równanie ma więc rozwiązanie spełniające warunki zadania, o ile $n \neq 3$.

Dla $n=3$ mamy natomiast
$$(a+b+c)^n = (a+b+c)^3 = (a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b+c) > a\cdot b\cdot c,$$
a zatem w tym przypadku równanie nie ma rozwiązań.

Odpowiedź

Dane równanie ma rozwiązanie w parami różnych dodatnich liczbach rzeczywistych a, b, c dla $n \neq 3$, natomiast dla $n=3$ nie ma takich rozwiązań.

Zadanie **2.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f prawdziwa jest nierówność
$$a^3b^5 + b^3c^5 + c^3d^5 + d^3e^5 + e^3f^5 + f^3a^5 \leqslant a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla ośmiu liczb, z których trzy są równe a^8, a pięć jest równych b^8, otrzymujemy
$$a^3b^5 \leqslant |a|^3|b|^5 = \sqrt[8]{a^8\cdot a^8\cdot a^8\cdot b^8\cdot b^8\cdot b^8\cdot b^8\cdot b^8} \leqslant \frac{3a^8+5b^8}{8}.$$
Analogicznie uzyskujemy następujących pięć nierówności:
$$b^3c^5 \leqslant \frac{3b^8+5c^8}{8}, \qquad c^3d^5 \leqslant \frac{3c^8+5d^8}{8}, \qquad d^3e^5 \leqslant \frac{3d^8+5e^8}{8},$$
$$e^3f^5 \leqslant \frac{3e^8+5f^8}{8}, \qquad f^3a^5 \leqslant \frac{3f^8+5a^8}{8},$$
skąd po dodaniu stronami wszystkich sześciu nierówności otrzymujemy nierówność daną w treści zadania.

Sposób II

Skorzystamy z następującego twierdzenia

Twierdzenie (o ciągach jednomonotonicznych)

Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozważamy wszystkie iloczyny postaci

$$x_{p(1)}y_{q(1)}+x_{p(2)}y_{q(2)}+x_{p(3)}y_{q(3)}+\ldots+x_{p(n)}y_{q(n)},$$

gdzie $(p(1), p(2), p(3), \ldots, p(n))$ oraz $(q(1), q(2), q(3), \ldots, q(n))$ są permutacjami zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Wówczas największą wartość ma iloczyn otrzymany dla permutacji spełniających warunki

$$x_{p(1)}\leqslant x_{p(2)}\leqslant x_{p(3)}\leqslant\ldots\leqslant x_{p(n)} \quad \text{oraz} \quad y_{q(1)}\leqslant y_{q(2)}\leqslant y_{q(3)}\leqslant\ldots\leqslant y_{q(n)}\,.$$

Przechodząc do rozwiązania zadania, przyjmijmy $n=6$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(a^3, b^3, c^3, d^3, e^3, f^3)$$

oraz

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)=(a^5, b^5, c^5, d^5, e^5, f^5).$$

Niech permutacja $(r(1), r(2), r(3), r(4), r(5), r(6))$ zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$ będzie permutacją porządkującą x'y niemalejąco:

$$x_{r(1)}\leqslant x_{r(2)}\leqslant x_{r(3)}\leqslant x_{r(4)}\leqslant x_{r(5)}\leqslant x_{r(6)}.$$

Zauważmy, że wówczas także

$$y_{r(1)}\leqslant y_{r(2)}\leqslant y_{r(3)}\leqslant y_{r(4)}\leqslant y_{r(5)}\leqslant y_{r(6)}.$$

Wówczas dla dowolnych permutacji $(p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), p(6))$ oraz $(q(1), q(2), q(3), q(4), q(5), q(6))$ zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$ zachodzi nierówność

$$x_{p(1)}y_{q(1)}+x_{p(2)}y_{q(2)}+x_{p(3)}y_{q(3)}+x_{p(4)}y_{q(4)}+x_{p(5)}y_{q(5)}+x_{p(6)}y_{q(6)}\leqslant$$
$$\leqslant x_{r(1)}y_{r(1)}+x_{r(2)}y_{r(2)}+x_{r(3)}y_{r(3)}+x_{r(4)}y_{r(4)}+x_{r(5)}y_{r(5)}+x_{r(6)}y_{r(6)}.$$

W szczególności mamy

$$\begin{aligned}
&a^3b^5+b^3c^5+c^3d^5+d^3e^5+e^3f^5+f^3a^5=\\
&\quad=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+x_5y_6+x_6y_1\leqslant\\
&\quad\leqslant x_{r(1)}y_{r(1)}+x_{r(2)}y_{r(2)}+x_{r(3)}y_{r(3)}+x_{r(4)}y_{r(4)}+x_{r(5)}y_{r(5)}+x_{r(6)}y_{r(6)}=\\
&\quad=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5+x_6y_6=\\
&\quad=a^8+b^8+c^8+d^8+e^8+f^8,
\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **3.** Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których istnieje taka nieujemna liczba całkowita k, że liczba $n!$ jest podzielna przez 3^k, ale nie jest podzielna przez 4^k.

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z Ligi OMG (seria VII, styczeń 2013):

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p}\right]+\left[\frac{N}{p^2}\right]+\left[\frac{N}{p^3}\right]+\left[\frac{N}{p^4}\right]+\ldots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Dla danej dodatniej liczby całkowitej n, niech s i t będą odpowiednio największymi takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $2^s \leqslant n$ oraz $3^t \leqslant n$. Wówczas, zgodnie z lematem, liczba 2 wchodzi do rozkładu liczby $n!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem

$$w_2=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{16}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^s}\right],$$

natomiast liczba 3 z wykładnikiem

$$w_3=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{27}\right]+\left[\frac{n}{81}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{3^t}\right].$$

Wtedy

$$w_2 \leqslant \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\frac{n}{16}+\ldots+\frac{n}{2^s}=n\cdot\frac{2^s-1}{2^s}=n-\frac{n}{2^s}\leqslant n-1,$$

przy czym równości zachodzą tylko w przypadku, gdy $n=2^s$.

Podobnie

$$w_3 \leqslant \frac{n}{3}+\frac{n}{9}+\frac{n}{27}+\frac{n}{81}+\ldots+\frac{n}{3^t}=n\cdot\frac{3^t-1}{2\cdot 3^t}=\frac{n}{2}-\frac{n}{2\cdot 3^t}\leqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2},$$

a przy tym równości zachodzą tylko w przypadku, gdy $n=3^t$.

Wykażemy, że warunki zadania są spełnione przez liczby n będące potęgami trójki. W takim przypadku $w_3=(n-1)/2$ i możemy przyjąć $k=(n-1)/2$. Wtedy jednak n nie jest potęgą dwójki, wobec czego $w_2<n-1$. W konsekwencji liczba $n!$ nie jest podzielna przez $2^{n-1}=4^k$.

Uwaga

Można udowodnić, że $w_2=n-s_2$ oraz $w_3=(n-s_3)/2$, gdzie s_2 i s_3 są sumami cyfr liczby n odpowiednio w układzie dwójkowym i trójkowym. Warunki zadania są spełnione przez $k=w_3$, o ile $s_2>s_3$, czyli wtedy, gdy suma cyfr liczby n w układzie dwójkowym jest większa od sumy jej cyfr w układzie trójkowym.

Zadanie **4.** Udowodnij, że istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której równanie

$$n^2+n+k=m^2 \tag{1}$$

ma więcej niż 2013 rozwiązań w nieujemnych liczbach całkowitych m, n.

Rozwiązanie

Przepiszmy równanie (1) kolejno jako:

$$\begin{aligned}4n^2+4n+1+4k-1&=4m^2,\\(2n+1)^2+4k-1&=(2m)^2,\\4k-1&=(2m)^2-(2n+1)^2,\\4k-1&=(2m-2n-1)\cdot(2m+2n+1).\end{aligned}$$

Oznaczając $x=2m-2n-1$ oraz $y=2m+2n+1$ widzimy, że liczby x, y są nieparzyste i spełniają nierówności $0<x<y$. Ponadto

$$m=\frac{x+y}{4} \quad \text{oraz} \quad n=\frac{y-x-2}{4}. \tag{2}$$

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k oraz dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x<y$ spełniających równanie

$$4k-1=xy,$$

wzory (2) definiują nieujemne całkowite wartości m i n spełniające równanie (1). Istotnie, jeżeli iloczyn xy daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, to jeden z czynników x, y daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3, a drugi resztę 1. Stąd wynika, że suma $x+y$ jest podzielna przez 4, a różnica $y-x$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 2 — liczby m, n zdefiniowane wzorami (2) są więc całkowite.

Zatem dla danej liczby k, liczba rozwiązań równania (1) jest równa liczbie przedstawień liczby $4k-1$ w postaci iloczynu xy dodatnich liczb całkowitych spełniających nierówność $x<y$. Z kolei ta liczba przedstawień jest równa połowie liczby dzielników liczby $4k-1$. Warunki zadania spełniają więc takie liczby k, że liczba $4k-1$ ma więcej niż 4026 dzielników.

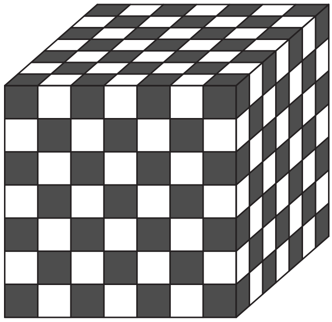
Możemy przyjąć na przykład $4k-1=3^{4027}$, czyli $k=\dfrac{3^{4027}+1}{4}$.

Zadanie **5.** Czy sześcian o krawędzi 7 można podzielić na 171 prostopadłościanów o wymiarach $1\times1\times2$ oraz jeden sześcian jednostkowy tak, aby sześcian jednostkowy zawierał punkt przecięcia przekątnych dużego sześcianu?

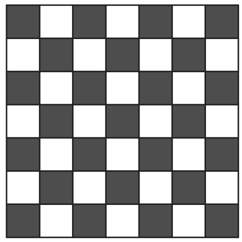
Rozwiązanie

Podzielmy sześcian o krawędzi 7 na 343 sześciany jednostkowe i pomalujmy je w trójwymiarową szachownicę — każdy sześcian jednostkowy jest pomalowany na czarno albo biało, a każde dwa sześciany mające wspólną ścianę pomalowane są na różne kolory. Przyjmijmy, że sześciany narożne pomalowane są na czarno (rysunek 1).

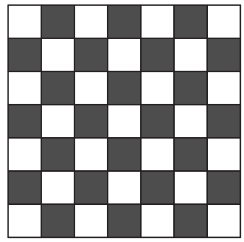
Wtedy warstwy pierwsza, trzecia, piąta i siódma są pokolorowane jak na rysunku 2, a pozostałe warstwy (w tym warstwa zawierająca punkt przecięcia przekątnych dużego sześcianu) są pomalowane jak na rysunku 3.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Widzimy, że sześcian jednostkowy zawierający punkt przecięcia przekątnych dużego sześcianu pomalowany jest na biało. Ponadto czarnych sześcianów jest 172, a białych 171. Po usunięciu środkowego sześcianu jedostkowego pozostają 172 czarne sześciany i 170 białych. Ponieważ każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times2$ pokrywa dwa sześciany jednostkowe różnych kolorów, tak powstałej figury nie da się podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1\times1\times2$.

Zadanie **6.** W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz $\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=360^\circ$. Wykaż, że

$$[BDF]=\frac{1}{2}[ABCDEF]\,,$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie

Niech P będzie takim punktem leżącym na zewnątrz sześciokąta, że

$$\sphericalangle BCP=\sphericalangle BAF\,,\quad \sphericalangle DCP=\sphericalangle DEF \quad \text{oraz} \quad CP=AB\,.$$

Taki punkt istnieje, ponieważ $\sphericalangle BAF+\sphericalangle DEF+\sphericalangle BCD=360^\circ$. Zauważmy, że trójkąty BCP i BAF są przystające na mocy cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok. Stąd $BP=BF$.

Analogicznie przystające są trójkąty DCP i DEF, więc $DP=DF$. Zatem na mocy cechy przystawania trójkątów bok-bok-bok przystające są trójkąty BDP i BDF. Wobec tego

$$[BDF]=[BDP]=[BCD]+[DCP]+[BCP]=[BCD]+[DEF]+[BAF]\,.$$

A zatem

$$[BDF]=\frac{1}{2}([BDF]+[BCD]+[DEF]+[BAF])=\frac{1}{2}[ABCDEF]\,,$$

co kończy dowód.

Zadanie **7.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC, punkty R i S są rzutami prostokątnymi odpowiednio A i B na prostą PQ. Wykaż, że $PR = QS$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka AB, a przez N rzut prostokątny punktu M na prostą PQ. Ponieważ $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB = 90^\circ$, więc na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg, którego średnicą jest odcinek AB. Punkt M jest środkiem średnicy, więc jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABPQ$. Stąd punkt N jest środkiem cięciwy PQ. Ponadto proste AR, MN i BS są równoległe oraz punkt M jest środkiem odcinka AB, więc punkt N jest także środkiem odcinka RS. Stąd $RQ = PS$, czyli $PR = QS$.

Zadanie **8.** W ostrosłupie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę ABC. Udowodnij, że punkt T jest ortocentrum trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Z zależności $\sphericalangle CSB = \sphericalangle CSA = 90^\circ$ wnioskujemy, że płaszczyzna ABS jest prostopadła do prostej CS. Prosta AB jest zawarta w płaszczyźnie ABS, więc jest prostopadła do prostej CS. Rzutem prostokątnym prostej CS na płaszczyznę ABC jest prosta CT. Na mocy twierdznia o trzech prostych prostopadłych, z prostopadłości prostych CS i AB wynika, że proste CT i AB są prostopadłe, czyli punkt T należy do wysokości w trójkącie ABC opuszczonej z wierzchołka C. Analogicznie dowodzimy, że punkt T należ do pozostałych wysokości w tym trójkącie, więc punkt ten jest ortocentrum trójkąta ABC.

Drugie zawody indywidualne

Zadanie **9.** Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^{2013} = b + b^{2013} \\ b^{2013} = c + c^{2013} \\ c^{2013} = d + d^{2013} \\ d^{2013} = e + e^{2013} \\ e^{2013} = a + a^{2013} \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e.

Rozwiązanie

Dodając wszystkie równania stronami dostajemy

$$0 = a + b + c + d + e. \tag{3}$$

Przypuśćmy, że jedna z liczb a, b, c, d, e jest dodatnia — bez straty ogólności możemy założyć, że jest to a. Wówczas

$$a + a^{2013} > 0,$$

co wraz z piątym równaniem danego układu daje $e > 0$. Stąd i z czwartego z danych rówanań otrzymujemy $d > 0$. Wykorzystując teraz trzecie równanie dostaniemy $c>0$, a następnie z drugiego równania otrzymamy $b>0$. W konsekwencji $a+b+c+d+e>0$, co stanowi sprzeczność z równością (3). Zatem żadna z liczb a, b, c, d, e nie jest dodatnia.

Analogicznie dowodzimy, że wśród tych liczb nie ma liczby ujemnej. Ostatecznie otrzymujemy $a=b=c=d=e=0$ i sprawdzamy bezpośrednio, że te liczby spełniają dany układ równań.

Odpowiedź

Dany układ równań ma jedno rozwiązanie: $a=b=c=d=e=0$.

Zadanie **10.** Udowodnij, że równanie

$$(a-b)^9=a^4b^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b.

Rozwiązanie

Rozwiązanie oprzemy na następujących dwóch spostrzeżeniach:

1° Jeżeli $a-b=1$, to lewa strona równania jest dzielnikiem prawej strony.

2° Przemnożenie liczb a, b przez tę samą liczbę r powoduje przemnożenie lewej strony równania przez r^9, a prawej przez r^8 — dla zmiany relacji między stronami równania efekt jest taki, jak gdybyśmy przemnożyli lewą stronę przez r.

Jeżeli więc A i B są takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $(A-B)^9$ jest dzielnikiem liczby A^4B^4, to rozwiązaniem danego równania jest para liczb $(a,b)=(Ar,Br)$, gdzie $r=A^4B^4/(A-B)^9$.

Wobec tego dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej B wystarczy przyjąć $A=B+1$ oraz

$$a=A\cdot A^4B^4, \quad b=B\cdot A^4B^4.$$

Otrzymujemy wówczas nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami

$$a=B^4\cdot(B+1)^5, \quad b=B^5\cdot(B+1)^4.$$

Zadanie **11.** Na płaszczyźnie wybrano 4026 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Następnie 2013 z tych punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe 2013 punktów na niebiesko. Udowodnij, że można te punkty tak połączyć 2013 odcinkami w pary, aby każdy z odcinków miał na końcach punkty różnych kolorów i aby przy tym żadne dwa odcinki się nie przecinały.

Rozwiązanie

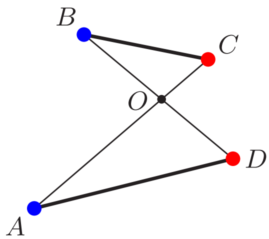
Narysujmy 2013 odcinki łączące w pary punkty różnych kolorów w taki sposób, aby suma ich długości była możliwie najmniejsza. Wykażemy, że wówczas żadne dwa odcinki się nie przecinają.

Przeprowadzając dowód nie wprost, załóżmy, że pewne dwa odcinki się przecinają (na rysunku 4 są to odcinki AC i BD przecinające się w punkcie O).

Zastąpmy odcinki AC i BD odcinkami AD i BC. Wówczas z nierówności trójkąta wynika, że

$$AD+BC<AO+OD+BO+OC=AC+BD,$$

a zatem suma długości odcinków po tak dokonanej korekcie się zmniejszyła, wbrew założeniu wyboru odcinków o najmniejszej sumie długości.



rys. 4

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że odcinki narysowane tak, aby zminimalizować ich łączną długość, nie przecinają się.

Zadanie **12.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q są ortocentrami trójkątów ABC i ABD. Wykaż, że $CD=PQ$.

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy trójkąty ABC i ABD są ostrokątne. Rozumowanie w pozostałych przypadkach jest analogiczne.

Ponieważ proste AP i BP są prostopadłe odpowiednio do prostych BC i AC, więc $\sphericalangle APB+\sphericalangle ACB=180^\circ$. Zatem punkt P', symetryczny do ortocentrum P trójkąta ABC względem prostej AB, leży na okręgu opisanym na tym trójkącie, czyli opisanym na czworokącie $ABCD$. Podobnie punkt Q', symetryczny do Q względem prostej AB, leży na tym okręgu. Ponadto $P'Q'=PQ$. Odcinki CP' i DQ' są równoległe, gdyż oba są prostopadłe do prostej AB. Stąd wnosimy, że czworokąt $DQ'P'C$ jest trapezem wpisanym w okrąg. To zaś oznacza, że trapez ten jest równoramienny, skąd $CD=P'Q'=PQ$.

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie **13.** Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n.$$

Rozwiązanie

Odpowiedź

Takie liczby nie istnieją.

Sposób I

Jeśli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi równość

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n,$$

to także $(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$. Jednak ta równość nie może mieć miejsca, gdyż $|\,5-3\sqrt{2}\,|<1$ oraz $|\,3-5\sqrt{2}\,|>1$.

Sposób II

Gdyby dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodziła równość $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$, to także mielibyśmy $(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$. W konsekwencji

$$(5+3\sqrt{2})^m\cdot(5-3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n\cdot(3-5\sqrt{2})^n,$$

czyli

$$\Big((5+3\sqrt{2})\cdot(5-3\sqrt{2})\Big)^m=\Big((3+5\sqrt{2})\cdot(3-5\sqrt{2})\Big)^n,$$

skąd

$$7^m=(-41)^n.$$

Jednak powyższa równość nie może zachodzić, gdyż jej lewa strona jest podzielna przez 7, a prawa nie.

Zadanie **14.** Dana jest liczba pierwsza $p>2$. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba 2^n-n jest podzielna przez p.

Rozwiązanie

Sposób I

Dla dodatniej liczby całkowitej k przyjmijmy

$$n=(kp-1)(p-1). \tag{4}$$

Wówczas z małego twierdzenia Fermata otrzymujemy

$$2^n-n=\Big(2^{p-1}\Big)^{kp-1}-(kp-1)(p-1)\equiv 1^{kp-1}-(-1)\cdot(-1)=1-1=0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

skąd wynika, że liczby n zdefiniowane wzorem (4) spełniają warunki zadania.

Sposób II

Niech r będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas z małego twierdzenia Fermata wynika, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniającej kongruencję

$$n\equiv r \pmod{p-1} \tag{5}$$

zachodzi przystawanie $2^n\equiv 2^r \pmod{p}$. Jeżeli ponadto

$$n\equiv 2^r \pmod{p}, \tag{6}$$

to

$$2^n-n\equiv 2^r-2^r=0 \pmod{p}.$$

Zatem warunki zadania spełnia każda dodatnia liczba całkowita n będąca rozwiązaniem układu kongruencji (5) i (6). Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika istnienie co najmniej jednej takiej liczby n, natomiast zauważając, że dodanie do liczby n wielokrotności iloczynu $p(p-1)$ nie wpływa na prawdziwość kongruencji (5) i (6), uzasadniamy istnienie nieskończenie wielu rozwiązań tego układu kongruencji.

Zadanie **15.** Niech o będzie okręgiem opisanym na prostokącie $ABCD$, punkt L punktem na tym łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktu A. Proste AL i DC przecinają się w punkcie K, proste AD i CL przecinają się w punkcie M, proste MK i BC przecinają się w punkcie N. Udowodnij, że punkty M, L, N, B leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Odcinek AC jest średnicą okręgu o, więc $AL \perp MC$. Wobec tego

$$\sphericalangle KLM = \sphericalangle KDM = 90^\circ.$$

Stąd wnioskujemy, że punkty M, D, K i L leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle LMK = \sphericalangle LDK$. Ponadto $\sphericalangle CBL = \sphericalangle CDL$, ponieważ są to kąty wpisane, oparte na tym samym łuku.

Jeśli punkt N leży na odcinku BC, to wobec równości $\sphericalangle LMN = \sphericalangle LBN$ punkty M, L, N, B leżą na jednym okręgu w tej kolejności. Jeśli zaś punkt N leży poza odcinkiem BC, to

$$\sphericalangle LMN = \sphericalangle LBC = 180^\circ - \sphericalangle LBN,$$

co oznacza, że punkty M, L, B, N leżą na jednym okręgu w tej kolejności. W obu przypadkach teza zadania jest spełniona.

Zadanie **16.** Podstawą ostrosłupa $SABCD$ jest równoległobok $ABCD$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu O leżącego wewnątrz tego ostrosłupa prawdziwa jest równość

$$V_{OSAB} + V_{OSCD} = V_{OSBC} + V_{OSDA},$$

gdzie V_{XYZT} oznacza objętość czworościanu $XYZT$.

Rozwiązanie

Niech O' będzie punktem przecięcia prostej SO z płaszczyzną $ABCD$. Punkt O' leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnimy najpierw, że

$$[ADO'] + [BCO'] = [ABO'] + [CDO'],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. W tym celu rozważmy taki punkt P na odcinku CD, że $OP \parallel AD$. Pole trójkąta ABP jest równe połowie pola równoległoboku $ABCD$. Wówczas

$$[ADO'] + [BCO'] = [ADP] + [BCP] = \tfrac{1}{2}[ABCD],$$

czyli

$$[ADO'] + [BCO'] = [ABO'] + [CDO'].$$

Czworościany $ADO'S$, $BCO'S$, $ABO'S$ i $CDO'S$ mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka S na płaszczyznę $ABCS$ i podstawy odpowiednio ADO', BCO', ABO', CDO'. Wobec powyższej równości otrzymujemy

$$V_{ADO'S} + V_{BCO'S} = V_{ABO'S} + V_{CDO'S}.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla czworościanów $ADO'O$, $BCO'O$, $ABO'O$ i $CDO'O$, otrzymujemy:

$$V_{ADO'O} + V_{BCO'O} = V_{ABO'O} + V_{CDO'O}.$$

Po odjęciu powyższych dwóch równości stronami dostajemy tezę.

Czwarte zawody indywidualne

Zadanie **17.** Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0\,.$$

Wykaż, że

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \geqslant 4abcd.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Równość

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$$

możemy przepisać w postaci

$$abc+bcd+cda+dab=0.$$

Zauważmy, że liczby a, b, c, d są pierwiastkami wielomianu

$$P(t)=(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)=t^4+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdot t^2+abcd.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $P(t)=P(-t)$, wielomian $P(t)$ jest funkcją parzystą. Zatem jego pierwiastki a, b, c, d tworzą dwie pary liczb przeciwnych, powiedzmy $a=-b$ oraz $c=-d$. Wówczas wielomian $Q(x)$ określony wzorem

$$Q(x)=x^2+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdot x+abcd$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej t równość $Q\left(t^2\right)=P(t)$. Wielomian $Q(x)$ ma więc dwa pierwiastki rzeczywiste, a mianowicie $a^2=b^2$ oraz $c^2=d^2$ (w przypadku, gdy $a^2=b^2=c^2=d^2$, jest to jeden pierwiastek podwójny).

Zatem wyróżnik wielomianu $Q(x)$ jest nieujemny, czyli

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2-4abcd \geqslant 0,$$

co jest równoważne nierówności podanej w tezie zadania.

Sposób II

Udowodnimy nierówność podaną w tezie zadania dla dowolnych (niekoniecznie różnych od zera) liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniających równość $a+b+c+d=0$, bez korzystania z równości

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0\,.$$

Zauważmy najpierw, że

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

skąd wobec założenia $a+b+c+d=0$ otrzymujemy

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}=$$

$$=-\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}.$$

Zatem

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 = \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4}. \tag{7}$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} = \sqrt{|abcd|}.$$

Podniesienie do kwadratu prowadzi do

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{16} \geqslant |abcd| \geqslant abcd,$$

czyli

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4} \geqslant 4abcd,$$

skąd wobec równości (7) dostajemy dowodzoną nierówność.

Zadanie **18.** Udowodnij, że równanie

$$a^3+b^3+2=c^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

Rozwiązanie

Dla liczby naturalnej $n>1$ przyjmijmy

$$c=n+1 \quad \text{oraz} \quad b=n-1.$$

Wówczas

$$c^3-b^3-2=(n+1)^3-(n-1)^3-2=n^3+3n^2+3n+1-n^3+3n^2-3n+1-2=6n^2.$$

Aby uzyskać rozwiązanie danego w zadaniu równania, wystarczy przyjąć

$$a=\sqrt[3]{6n^2},$$

o ile liczba $6n^2$ jest sześcianem liczby całkowitej, a do tego wystarczy podstawić $n=6k^3$, gdzie k jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Otrzymujemy wówczas rozwiązanie

$$a=6k^2, \qquad b=6k^3-1, \qquad c=6k^3+1.$$

Uwaga

Nie wiadomo, czy dane w zadaniu równanie ma inne rozwiązania niż wynikające z zaprezentowanej konstrukcji.

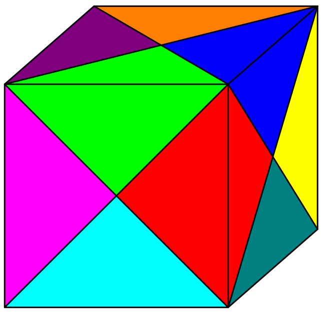
Zadanie **19.** Czy istnieje sześcian o krawędzi długości niecałkowitej, którego powierzchnię można okleić prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×6?

Uwaga: Każdy pasek papieru musi być przyklejony całą swoją powierzchnią do sześcianu (niekoniecznie do jednej ściany). Pasków papieru nie można rozdzierać, nie można naklejać jednego paska na drugi, ani nie można sklejać paska samego ze sobą.

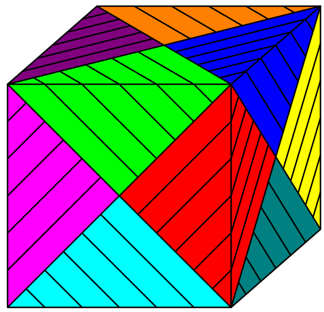
Rozwiązanie

Udowodnimy, że takim sześcianem jest na przykład sześcian o krawędzi $6\sqrt{2}$.

Poprowadźmy przekątne wszystkich ścian — w ten sposób każda ściana zostaje podzielona na cztery trójkąty prostokątne równoramienne (rys. 5). Dwa trójkąty leżące na sąsiednich ścianach i mające krawędź sześcianu jako wspólną przeciwprostokątną składają się na kwadrat o boku 6. Każdy taki kwadrat można pokryć sześcioma prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×6 (rys. 6).



rys. 5



rys. 6

Zadanie **20.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle BAC$, to $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABP$.

Rozwiązanie

Prosta PQ jest równoległa do podstaw trapezu i przecina odcinek AB w punkcie M, który jest środkiem tego odcinka.

Oznaczmy przez R punkt symetryczny do punktu P względem punktu M. Wówczas czworokąt $APBR$ jest równoległobokiem. Wobec tego

$$\sphericalangle RBA = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAQ = \sphericalangle RQA,$$

skąd wniosek, że punkty R, A, Q, B leżą na jednym okręgu. A zatem

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BQR = \sphericalangle BAR = \sphericalangle ABP,$$

co kończy dowód.

Zadanie **21.** Okręgi o_1, o_2, o_3 o promieniach odpowiednio $r_1 > r_2 > r_3$ są parami styczne wewnętrznie w punkcie K. Punkty A, B, C leżą na okręgu o_1, przy czym odcinek AB jest styczny do okręgu o_2 w punkcie P, a odcinek BC jest styczny do okręgu o_3 w punkcie Q. Prosta PQ przecina drugi raz okrąg o_3 w punkcie R. Udowodnij, że prosta AR jest styczna do okręgu o_3.

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy punkty K, A, B i C leżą na okręgu o_1 w tej właśnie kolejności. Rozumowanie w pozostałym przypadku jest analogiczne.

Z punktu A poprowadźmy styczną do okręgu o_3 w punkcie R', która przecina odcinek BQ w punkcie X. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że punkty P, Q oraz R' są współliniowe. To z kolei, na mocy twierdzenia Menalausa zastosowanego do trójkąta ABX, jest równoważne zależności

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QX}\cdot\frac{XR'}{R'A}=1\,,$$

czyli

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{R'A}=1\,. \tag{8}$$

Niech D i E będą punktami przecięcia odcinka AK odpowiednio z okręgami o_2 i o_3, a F i G punktami przecięcia odcinka BK odpowiednio z okręgami o_2 i o_3. Okręgi o_1, o_2, o_3 są parami jednokładne, ze środkiem jednokładności w punkcie K. Wobec tego

$$\frac{BF}{AD}=\frac{BG}{AE}\,,$$

a to jest równoważne równości

$$\frac{BF\cdot BK}{AD\cdot AK}=\frac{BG\cdot BK}{AE\cdot AK}\,. \tag{9}$$

Obliczając potęgi punktów A i B względem okręgu o_2, otrzymujemy

$$AD\cdot AK=AP^2, \qquad BF\cdot BK=PB^2\,.$$

Z kolei wyznaczając potęgi punktów A i B względem okręgu o_3, uzyskujemy

$$AE\cdot AK=R'A^2, \qquad BG\cdot BK=BQ^2\,.$$

Podstawiając te zależności do równości (9), dostajemy żądaną równość (8).

Mecz matematyczny

Zadanie **22.** Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$\left[m\sqrt{10}\right]=\left[n\sqrt{10}\right]+2m+4n$$

w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Uwaga: Zapis $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego lematu.

Lemat

Niech α, β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi spełniającymi warunek

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

Wówczas ciągi (a_n) oraz (b_n) określone wzorami

$$a_n=[\alpha\cdot n]\,, \qquad b_n=[\beta\cdot n]\,,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x, są rosnącymi ciągami o wyrazach całkowitych dodatnich oraz każda dodatnia liczba całkowita występuje w dokładnie jednym z tych ciągów.

Dowód lematu

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k wyznaczmy łączną liczbę wyrazów ciągów (a_n) i (b_n) mniejszych od k.

Warunek $a_n < k$ jest równoważny warunkowi $[\alpha \cdot n] < k$, a to jest równoważne nierówności $\alpha \cdot n < k$, czyli

$$n < \frac{k}{\alpha}, \quad \text{lub równoważnie} \quad n \leqslant \left[\frac{k}{\alpha}\right].$$

Zatem w ciągu (a_n) występuje $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ wyrazów mniejszych od k i analogicznie w ciągu (b_n) występuje $\left[\frac{k}{\beta}\right]$ wyrazów mniejszych od k.

Zatem dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k, w obu ciągach występuje $\left[\frac{k}{\alpha}\right] + \left[\frac{k}{\beta}\right]$ wyrazów mniejszych od k. Ponieważ dla dowolnej liczby niewymiernej x zachodzą nierówności $x-1 < [x] < x$, otrzymujemy

$$k-2 = \frac{k}{\alpha} - 1 + \frac{k}{\beta} - 1 < \left[\frac{k}{\alpha}\right] + \left[\frac{k}{\beta}\right] < \frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\beta} = k.$$

Liczba $\left[\frac{k}{\alpha}\right] + \left[\frac{k}{\beta}\right]$ jest całkowita, więc uzyskujemy

$$\left[\frac{k}{\alpha}\right] + \left[\frac{k}{\beta}\right] = k-1.$$

Wykazaliśmy więc, że w ciągach (a_n) i (b_n) występuje $k-1$ wyrazów mniejszych od k. Analogicznie dowodzimy, że w ciągach (a_n) i (b_n) występuje k wyrazów mniejszych od $k+1$. Wobec tego dokładnie jeden wyraz jest równy k, co kończy dowód lematu.

Przystępując do rozwiązania zadania, zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$[x+k] = [x] + k.$$

Dane w zadaniu równanie można więc przepisać w postaci

$$\left[m\sqrt{10} - 2m\right] = \left[n\sqrt{10} + 4n\right],$$

czyli

$$\left[\left(\sqrt{10} - 2\right) \cdot m\right] = \left[\left(\sqrt{10} + 4\right) \cdot n\right],$$

co można zapisać jako

$$[\alpha \cdot m] = [\beta \cdot n]$$

dla

$$\alpha = \sqrt{10} - 2, \qquad \beta = \sqrt{10} + 4.$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{10}-2} + \frac{1}{\sqrt{10}+4} = \frac{\sqrt{10}+2}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)} + \frac{4-\sqrt{10}}{(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})} =$$
$$= \frac{2+\sqrt{10}}{10-4} + \frac{4-\sqrt{10}}{16-10} = \frac{2+\sqrt{10}}{6} + \frac{4-\sqrt{10}}{6} = 1\,.$$

Zatem na mocy lematu każda dodatnia liczba całkowita jest dokładnie jednej z postaci $[\alpha \cdot m]$ albo $[\beta \cdot n]$, skąd wynika, że dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Odpowiedź

Dane równanie nie ma rozwiązań spełniających warunki zadania.

Zadanie **23.** Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz = x^4+y^4+z^4+1. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Sposób I

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$s_1 = x+y+z, \quad s_2 = xy+yz+zx, \quad s_3 = xyz.$$

Wówczas

$$s_1^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+6xyz,$$
$$s_1s_2 = x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+3xyz\,,$$

skąd

$$x^3+y^3+z^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3.$$

Podobnie, korzystając z równości

$$s_1^4 = x^4+y^4+z^4+4(x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3)+$$
$$+12(x^2yz+y^2zx+z^2xy)+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,,$$

$$s_1^2s_2 = x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3+$$
$$+5(x^2yz+y^2zx+z^2xy)+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,,$$

$$s_2^2 = 2(x^2yz+y^2zx+z^2xy)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\,,$$

$$s_1s_3 = x^2yz+y^2zx+z^2xy\,,$$

otrzymujemy

$$x^4+y^4+z^4 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 2s_2^2 + 4s_1s_3.$$

Pierwsze równanie układu równań danego w zadaniu sprowadza się do $s_1=1$. Wobec tego drugie równanie przyjmuje postać

$$(1-3s_2+3s_3)+s_3=1-4s_2+2s_2^2+4s_3+1,$$

czyli $2s_2^2-s_2+1=0$. Jednak równanie to nie jest spełnione przez żadną liczbę rzeczywistą s_2, gdyż

$$2s_2^2-s_2+1=2s_2^2-s_2+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=2\left(s_2^2-\frac{s_2}{2}+\frac{1}{16}\right)+\frac{7}{8}=2\left(s_2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0.$$

Odpowiedź

Układ równań dany w treści zadania nie ma rozwiązań.

Sposób II

Wobec równości $x+y+z=1$, lewa strona drugiego równania danego układu nie zmienia wartości po przemnożeniu przez $x+y+z$. Drugie równanie przybiera wtedy kolejno postać

$$(x^3+y^3+z^3+xyz)\cdot(x+y+z)=x^4+y^4+z^4+1\,.$$

Przekształcając ją kolejno, uzyskujemy

$$x^4+y^4+z^4+x^2yz+xy^2z+xyz^2+x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3=x^4+y^4+z^4+1\,,$$

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2+x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3=1\,,$$

$$(xy+yz+zx)\cdot(x^2+y^2+z^2)=1\,,$$

$$\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)=1\,,$$

$$(1-(x^2+y^2+z^2))\cdot(x^2+y^2+z^2)=2\,,$$

co po podstawieniu $w=x^2+y^2+z^2$ sprowadza się do $w(w-1)=-2$. Jednak równanie to nie ma rozwiązań rzeczywistych w, gdyż

$$w(w-1)=\left(w-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}>-2.$$

Zadanie **24.** Udowodnij, że równanie

$$(a+b+c)^2=abc \tag{10}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że równanie (10) jest spełnione przez trójkę liczb

$$a=6,\quad b=12,\quad c=18.$$

Wykażemy, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań, w których $a=6$.

Po podstawieniu $a=6$ równanie (10) przyjmuje kolejno postać

$$(6+b+c)^2=6bc, \tag{11}$$

$$36+12b+12c+2bc+b^2+c^2=6bc,$$

$$36+12b+12c-4bc+b^2+c^2=0,$$

$$b^2-(4c-12)b+36+12c+c^2=0. \tag{12}$$

Przy ustalonym c równanie (12) jest równaniem kwadratowym względem b. Jeżeli dodatnie liczby całkowite $b<c$ spełniają równanie (11), to przy tak ustalonym c równanie (12) ma pierwiastek b, ale ma też drugi pierwiastek

$$b_2=(4c-12)-b=c+(c-b)+2(c-6),$$

który jest większy od c, jeśli $c>6$. Wówczas liczby $c<b_2$ spełniają równanie

$$(6+b_2+c)^2=6b_2c.$$

Powyższa procedura pozwala uzyskać z trójki liczb $(a,b,c)=(6,b,c)$, gdzie $6<b<c$, spełniającej równanie (10), inną trójkę liczb

$$(a',b',c')=(6,c,4c-12-b)$$

spełniającą to równanie, a przy tym $a'+b'+c'>a+b+c$. W ten sposób możemy uzyskać nieskończenie wiele rozwiązań równania (10).

Sposób II

Rozwiązanie oprzemy na następującym spostrzeżeniu:

Przemnożenie liczb a, b, c przez tę samą liczbę r powoduje przemnożenie lewej strony równania (10) przez r^2, a prawej przez r^3 — z punktu widzenia zmiany relacji między stronami równania efekt jest taki, jak gdybyśmy przemnożyli prawą stronę przez r.

Dla uzyskania rozwiązania równania (10) wystarczy więc wskazać takie liczby A, B, C, że liczba $(A+B+C)^2$ jest podzielna przez ABC, a następnie przyjąć $a=Ar$, $b=Br$, $c=Cr$ dla odpowiednio dobranej liczby r, a dokładniej dla

$$r=\frac{(A+B+C)^2}{ABC}.$$

Wówczas liczby

$$a=\frac{(A+B+C)^2}{BC}, \quad b=\frac{(A+B+C)^2}{AC}, \quad c=\frac{(A+B+C)^2}{AB},$$

spełniają równanie dane w treści zadania.

Aby zakończyć rozwiązanie zadania, wystarczy wykazać istnienie nieskończenie wielu trójek dodatnich liczb całkowitych (A,B,C), dla których liczba $(A+B+C)^2$ jest podzielna przez ABC. Zauważmy przy tym, że różne trójki względnie pierwszych liczb (A, B, C) prowadzą do różnych rozwiązań (a, b, c) równania (10), gdyż

$$A=\frac{a}{\mathrm{NWD}(a,b,c)}, \quad B=\frac{b}{\mathrm{NWD}(a,b,c)}, \quad C=\frac{c}{\mathrm{NWD}(a,b,c)}.$$

Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego określonym wzorami

$$F_1=F_2=1, \qquad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\ldots$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$F_n^2+F_{n+2}^2+(-1)^n=3F_nF_{n+2}. \tag{13}$$

1° Dla $n=1$ równość (13) przyjmuje postać $9=9$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że

$$F_n^2+F_{n+2}^2+(-1)^n=3F_nF_{n+2}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$F_{n+1}^2+F_{n+3}^2+(-1)^{n+1}=3F_{n+1}F_{n+3}. \tag{14}$$

Zauważmy, że

$$F_{n+1}=F_{n+2}-F_n \qquad \text{oraz} \qquad F_{n+3}=F_{n+2}+F_{n+1}=2F_{n+2}-F_n.$$

co po wstawieniu do równości (14) pozwala przekształcić tę równość do kolejnych postaci równoważnych:

$$(F_{n+2}-F_n)^2+(2F_{n+2}-F_n)^2+(-1)^{n+1}=3\cdot(F_{n+2}-F_n)\cdot(2F_{n+2}-F_n),$$

$$F_{n+2}^2-2F_nF_{n+2}+F_n^2+4F_{n+2}^2-4F_nF_{n+2}+F_n^2+(-1)^{n+1}=$$
$$=3\cdot(2F_{n+2}^2-3F_nF_{n+2}+F_n^2),$$

$$5F_{n+2}^2-6F_nF_{n+2}+2F_n^2-(-1)^n=6F_{n+2}^2-9F_nF_{n+2}+3F_n^2,$$

$$3F_nF_{n+2}=F_{n+2}^2+F_n^2+(-1)^n,$$

a ta równość jest prawdziwa na mocy założenia indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej, równość (13) jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby całkowitej n.

Niech teraz liczba n będzie nieparzystą liczbą naturalną i przyjmijmy

$$A=F_n^2, \quad B=F_{n+2}^2, \quad C=1.$$

Z równości (13) otrzymujemy

$$A+B+C=3\sqrt{ABC},$$

skąd $(A+B+C)^2=9ABC$. Zatem trójka $(a,b,c)=(9A,9B,9C)$ czyli

$$(a,b,c)=(9F_n^2,9F_{n+2}^2,9)$$

spełnia równanie (10).

Zadanie **25.** Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, liczba n^2+n+k nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia.

Chińskie twierdzenie o resztach

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej s, dowolnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_s$ oraz dowolnych liczb całkowitych $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_s$ istnieje dodatnia liczba całkowita k, spełniająca układ kongruencji

$$\begin{cases} k \equiv r_1 \pmod{p_1} \\ k \equiv r_2 \pmod{p_2} \\ k \equiv r_3 \pmod{p_3} \\ \quad \ldots \\ k \equiv r_s \pmod{p_s}. \end{cases}$$

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Rozważmy reszty z dzielenia liczb $n^2+n=n(n+1)$ przez p dla $n=0,1,2,\ldots,p-1$. Ponieważ dla $n=0$ oraz dla $n=p-1$ reszty te są równe 0, istnieje niezerowa reszta, która nie występuje wśród reszt z dzielenia liczb $n^2+n=n(n+1)$ przez p. Niech R będzie taką resztą. Wówczas przyjmując $r=p-R$ otrzymujemy wielomian n^2+n+r, który nie przyjmuje wartości podzielnych przez p.

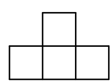
Niech teraz $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $\ldots$, $p_{25}=97$ będą liczbami pierwszymi mniejszymi od 100, a $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=5$, $\ldots$, $r_{25}=97$ odpowiadającymi im resztami, dla których wielomian n^2+n+r_i nie przyjmuje wartości podzielnych przez p_i.

Korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach dla $s=25$ oraz dla wyżej określonych liczb p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_{25}, r_1, r_2, r_3, $\ldots$, r_{25}, dowodzimy istnienia liczby k spełniającej warunki zadania.

Uwaga

Wykonując obliczenia przy użyciu komputera, można stwierdzić, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $k=67374467$.

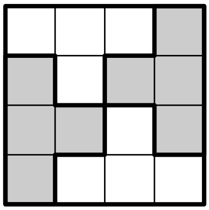
Zadanie **26.** Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że szachownicę o boku n daje się rozciąć na kostki tetromina o polu 4 i kształcie jak na poniższym rysunku.



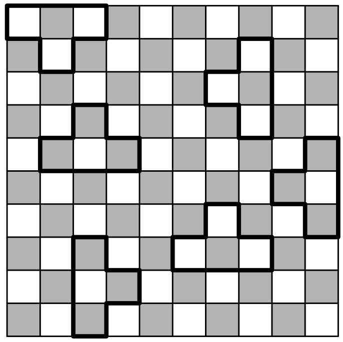
Rozwiązanie

1° Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba pól szachownicy jest liczbą nieparzystą, szachownicy nie można więc pokryć figurami o polu parzystym.

2° Kwadrat o boku 4 można pokryć czterema kostkami tetromina jak na rysunku 7. Ponieważ każdy kwadrat o boku podzielnym przez 4 można podzielić na kwadraty 4×4, liczby n podzielne przez 4 spełniają warunki zadania.



rys. 7



rys. 8

3° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy n jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4. Pokolorujmy szachownicę w standardowy sposób jak na rysunku 8, gdzie przedstawiono kolorowanie w przypadku $n=10$. Zauważmy, że każda kostka tetromina pokrywa trzy pola jednego koloru i jedno pole drugiego, czyli nieparzyście wiele pól każdego koloru. Zauważmy też, że liczba kostek tetromina potrzebnych do pokrycia szachownicy jest nieparzysta. Tymczasem szachownica zawiera parzyście wiele pól każdego koloru. To oznacza, że pokrycie szachownicy nie jest możliwe.

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają liczby n podzielne przez 4.

Zadanie **27.** Klockiem nazwiemy bryłę powstałą z doklejenia sześcianów jednostkowych do trzech parami sąsiednich ścian sześcianu jednostkowego. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że prostopadłościan o wymiarach $2013\times 2013\times n$ daje się zbudować z klocków?

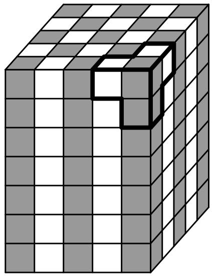
Rozwiązanie

Odpowiedź

Taka liczba n nie istnieje.

Aby to wykazać, pokolorujmy sześciany jednostkowe danego prostopadłościanu o wymiarach $2013\times 2013\times n$ jak na rysunku 9, gdzie przedstawiono prostopadłościan o wymiarach $5\times 5\times 7$. Przy tym kolorowaniu górna ściana, będąca kwadratem 2013×2013, jest pokolorowana w szachownicę, a także wszystkie warstwy poniżej niej są polokorowane w identyczny sposób.

Zauważmy, że każdy klocek umieszczony w tak pokolorowanym prostopadłościanie i pokrywający cztery sześciany jednostkowe, składa się z dwóch sześcianów jednostkowych pokolorowanych i dwóch niepokolorowanych. Ponieważ jednak liczby pokolorowanych i niepokolorowanych sześcianów składających się na prostopadłościan są różne, zbudowanie prostopadłościanu z klocków nie jest możliwe.



rys. 9

Zadanie **28.** Udowodnij, że istnieje liczba naturalna m o następującej własności: każda liczba naturalna $n \geqslant m$ ma taką wielokrotność mniejszą od $n\sqrt[3]{n^2}$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 5.

Rozwiązanie

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech k będzie najmniejszą liczbą całkowitą, dla której spełniona jest nierówność $n < 4^k$.

Rozważmy wszystkie nieujemne liczby całkowite, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry mniejsze od 4, a przy tym cyfr tych jest nie więcej niż k. Takich liczb jest 4^k, a każda z nich jest mniejsza od $10^k/3$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że pewne dwie z tych liczb dają przy dzieleniu przez n taką samą resztę. Wobec tego różnica tych liczb jest podzielna przez n. Zauważmy, że odejmując dwie liczby, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, otrzymujemy liczbę, w której zapisie mogą występować tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

Udowodniliśmy więc, że istnieje wielokrotność liczby n mniejsza od $10^k/3$, niezawierająca żadnej z cyfr 4 i 5 w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla odpowiednio dużych liczb naturanych n zachodzi nierówność

$$\frac{10^k}{3} \leqslant n\sqrt[3]{n^2}. \tag{15}$$

Z definicji liczby k wynika nierówność $n \geqslant 4^{k-1}$, czyli

$$4^k \leqslant 4n. \tag{16}$$

Zauważmy, że

$$(1,024)^{50} = (1+0,024)^{50} = 1 + \binom{50}{1} \cdot 0,024 + \ldots + \binom{50}{50} \cdot 0,024^{50} >$$
$$> 1 + \binom{50}{1} \cdot 0,024 = 1 + 50 \cdot 0,024 > 1 + 50 \cdot 0,02 = 2.$$

Stąd kolejno dochodzimy do

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1000^{50} &< (1,024)^{50} \cdot 1000^{50} = 1024^{50}, \\ 2 \cdot 10^{150} &< 2^{500}, \\ 10^{150} &< 2^{499}, \\ 10^{300} &< 4^{499}, \end{aligned}$$

czyli ostatecznie
$$10 < 4^{499/300}. \tag{17}$$

Przejdziemy teraz do dowodu nierówności (15) dla odpowiednio dużych wartości n. Korzystając kolejno z nierówności (17) i (16), otrzymujemy
$$\frac{10^k}{3} \leqslant \frac{(4^{499/300})^k}{3} = \frac{4^{k\cdot 499/300}}{3} = \frac{\left(4^k\right)^{499/300}}{3} \leqslant \frac{(4n)^{499/300}}{3} = \frac{4^{499/300}}{3}\cdot n^{499/300} =$$
$$= \frac{4^{499/300}}{3}\cdot n^{-1/300}\cdot n^{500/300} = \frac{4^{499/300}}{3}\cdot n^{-1/300}\cdot n\sqrt[3]{n^2} \leqslant n\sqrt[3]{n^2}$$
dla wszystkich liczb n spełniających zależność
$$\frac{4^{499/300}}{3}\cdot n^{-1/300} \leqslant 1\,.$$
Z kolei nierówność tę można przekształcić do $4^{499}/3^{300} \leqslant n$.

Udowodniliśmy więc, że warunki zadania są spełnione przez każdą liczbę naturalną $n \geqslant 4^{499}/3^{300}$. Tym samym rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zadanie **29.** W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie L. Punkt K jest obrazem symetrycznym punktu L względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykaż, że $BK \geqslant HL$.

Rozwiązanie

Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC, przez O oznaczmy jego środek. Oznaczmy ponadto przez M środek odcinka AC oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że $AB \leqslant BC$. Wówczas punkt L leży na odcinku AM.

Niech G będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AC. Punkt G leży wtedy na okręgu o oraz $HL = LG$. Niech z kolei BE będzie średnicą okręgu o. Wówczas czworokąt $BKEL$ jest równoległobokiem, a więc $BK = LE$. Wobec tego zadanie sprowadza się do wykazania, że $LE \geqslant LG$.

Z równości $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BEC$ wynika, że $\sphericalangle ABG = \sphericalangle CBE$. Wobec tego krótsze łuki AG i EC okręgu o są równej długości, a zatem punkty G i E są symetryczne względem symetralnej k odcinka AC. Ponadto punkt L leży po tej samej stronie prostej k, co punkt G, skąd wynika, że $LE \geqslant LG$. To kończy dowód.

Zadanie **30.** Dany jest kwadrat $ABCD$. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne KLM, że punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD. Wyznacz zbiór środków wszystkich odcinków KL.

Rozwiązanie

Niech CDR będzie trójkątem równobocznym zbudowanym do wewnątrz kwadratu $ABCD$. Niech ponadto Q będzie punktem przecięcia odcinków BD i CR. Udowodnimy, że szukanym zbiorem jest odcinek QR.

Oznaczmy przez S środek odcinka KL. Wykażemy najpierw, że punkt S leży na odcinku QR.

Mamy $\sphericalangle LSM = \sphericalangle MCL = 90°$, wobec tego punkty M, S, L, C leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle MCS = \sphericalangle MLS = 60°$. Ponadto punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego KBL, więc $KS = SB$. Mamy więc $AS \geqslant KS = SB$, a zatem punkt S leży na odcinku RC.

Punkt M leży na boku DC, wobec tego $\sphericalangle DKL \geqslant \sphericalangle MKL = 60°$ oraz $\sphericalangle KLD \leqslant \sphericalangle KLM = 60°$. W trójkącie KLD mamy $\sphericalangle DKL \geqslant \sphericalangle KLD$, zatem $DL \geqslant DK$. Rozważmy teraz trójkąty prostokątne DAK oraz LCD. Boki AD oraz DC sa równej długości, $DK \leqslant DL$, więc z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $AK \leqslant CL$. Dalej: $KB = AB - AK \geqslant CB - CL = BL$, zatem w trójkącie prostokątnym KBL mamy $\sphericalangle BKL \leqslant 45°$, czyli również $\sphericalangle SBK \leqslant 45°$. Stąd wniosek, że punkt S leży na odcinku QR.

Udowodnimy teraz, że dla każdego punktu S leżącego na odcinku QR można zbudować trójkąt KLM spełniający warunki zadania.

Niech o będzie okręgiem o środku w S i promieniu SB, oznaczmy przez K ($K \neq B$) punkt przecięcia okręgu o z prostą AB oraz przez L ($L \neq B$) punkt przecięcia okręgu o z prostą BC. Wówczas punkt K znajduje się na odcinku AB, gdyż $AS \geqslant BS$. Punkt L znajduje się na odcinku BC, gdyż cały odcinek QR znajduje się po tej stronie symetralnej odcinka CB, co punkt B. Punkty K, S, L leżą na jednym odcinku, gdyż $\sphericalangle LBK = 90°$, a zatem KL jest średnicą okręgu o o środku S.

Oznaczmy przez M punkt przecięcia symetralnej odcinka KL z DC. Kąt $\sphericalangle CLK$ jest rozwarty, $\sphericalangle LSM = \sphericalangle MCL = 90°$, zatem punkt M leży na prostej DC po tej samej stronie punktu C co punkt D oraz punkty M, S, L i C leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle SLM = \sphericalangle MCS = 60°$, a więc trójkąt KLM jest równoboczny. Pozostaje wykazać, że punkt M leży na odcinku DC.

Ponieważ $\sphericalangle CBS \geqslant \sphericalangle CBD = 45°$, więc $\sphericalangle KLB \geqslant 45° \geqslant \sphericalangle BKL$. Wobec tego $LB < KB$, skąd $CL \geqslant AK$. Rozważając teraz trójkąty prostokątne DAK oraz LCD otrzymujemy, że $DK \leqslant DL$, zatem punkt D leży po tej stronie symetralnej odcinka KL, co punkt K lub punkt D znajduje się na tej symetralnej. Zatem rzeczywiście punkt M znajduje się na odcinku DC.

Zadanie **31.** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Punkty X i Y są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Prosta XY przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PCQ jest równoramienny.

Rozwiązanie

Wybierzmy takie punkty E, F leżące odpowiednio na odcinkach AC i BC, że $CE = CF = CD$. Prosta CX zawiera dwusieczną kąta DCE, wobec czego $\sphericalangle ECX = \sphericalangle DCX$. Zatem trójkąty DCX i ECX są przystające na mocy cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok. Stąd $\sphericalangle CEX = \sphericalangle CDX = 45°$, ponieważ prosta DX zawiera dwusieczną kąta prostego CDA.

Mamy ponadto $CE = CF$ oraz $\sphericalangle ECF = 90°$, więc $\sphericalangle CEF = 45°$. Wynika stąd, że punkt X należy do prostej EF. Analogicznie dowodzimy, że punkt Y należy do prostej EF, więc $E=P$, $F=Q$. Z równości $CP=CE=CF=CQ$ uzyskujemy tezę.

Zadanie **32.** Dany jest czworościan, w którym wszystkie ściany są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnij, że można w taki sposób wybrać dwie przeciwległe krawędzie tego czworościanu, aby czworościan zawierał się w sumie kul, których średnicami są te krawędzie.

Rozwiązanie

Weźmy tę parę krawędzi przeciwległych, w której suma kwadratów długości jest maksymalna. Oznaczmy wierzchołki czworościanu przez $ABCD$ w taki sposób, aby $AB^2+CD^2 \geqslant AC^2+BD^2$ i $AB^2+CD^2 \geqslant AD^2+BC^2$.

Udowodnimy najpierw, że krawędzie czworościanu są zawarte w sumie kul o średnicach AB i CD. Te kule pokrywają oczywiście krawędzie AB i CD. Weźmy dowolny punkt P z krawędzi AC. Załóżmy nie wprost, że nie należy on do żadnej z kul. Wówczas kąt APB musi być ostry, ponieważ punkt P należy do kuli o średnicy AB wtedy i tylko wtedy, gdy należy do okręgu o średnicy AB na płaszczyźnie ABP. Podobnie kąt CPD musi być ostry. Z równości

$$\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC=\sphericalangle CPD+\sphericalangle APD=180^\circ$$

wnioskujemy, że kąty BPC, APD są rozwarte. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AB^2+CD^2<AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=AP^2+DP^2+BP^2+CP^2<AD^2+BC^2,$$

co jest sprzeczne z założeniem. Wobec tego, suma kul pokrywa całą krawędź AC, analogicznie dowodzimy, że pokrywa pozostałe krawędzie.

Wykażemy teraz, że suma rozważanych kul pokrywa wszystkie ściany. Rozpatrzmy ścianę ABC i przekrój dwóch kul płaszczyzną zawierającą tę ścianę. Przekrój ten pokrywa boki trójkąta ABC i jest sumą dwóch kół. Gdyby pewien punkt z wnętrza trójkąta nie należał do żadnego z dwóch kół, pewna półprosta wychodząca z tego punktu byłaby rozłączna z kołami. Ta półprosta musiałaby przeciąć pewien bok trójkąta, czyli istniałby punkt na boku, który nie należy do żadnego z kół, ale wiemy już, że takich punktów nie ma. Wobec tego koła pokrywają ścianę ABC.

Analogicznie dowodzimy, że rozpatrywane kule pokrywają każdą z pozostałych ścian. Pozostaje wykazać, że kule te pokrywają cały czworościan. Podobnie jak przed chwilą załóżmy nie wprost, że pewien punkt z czworościanu nie należy do żadnej z kul. Wówczas istniałaby półprosta wychodząca z tego punktu, rozłączna z danymi kulami. Ta półprosta przecinałaby pewną ścianę, więc istniałby punkt na ścianie, który nie należy do żadnej z kul. To jednak byłoby sprzeczne z wcześniejszym wnioskiem. Ostatecznie więc suma rozpatrywanych kul pokrywa cały czworościan.