Treści zadań (poziom OM)

Pierwsze zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równanie

$$(a+b+c)^n = abc.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f prawdziwa jest nierówność

$$a^3b^5+b^3c^5+c^3d^5+d^3e^5+e^3f^5+f^3a^5 \leqslant a^8+b^8+c^8+d^8+e^8+f^8.$$

3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których istnieje taka nieujemna liczba całkowita k, że liczba $n!$ jest podzielna przez 3^k, ale nie jest podzielna przez 4^k.

4. Udowodnij, że istnieje dodatnia liczba całkowita k, dla której równanie

$$n^2+n+k=m^2$$

ma więcej niż 2013 rozwiązań w nieujemnych liczbach całkowitych m, n.

5. Czy sześcian o krawędzi 7 można podzielić na 171 prostopadłościanów o wymiarach $1\times1\times2$ oraz jeden sześcian jednostkowy tak, aby sześcian jednostkowy zawierał punkt przecięcia przekątnych dużego sześcianu?

6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz $\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=360^\circ$. Wykaż, że

$$[BDF]=\frac{1}{2}[ABCDEF]\,,$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC, punkty R i S są rzutami prostokątnymi odpowiednio A i B na prostą PQ. Wykaż, że $PR=QS$.

8. W ostrosłupie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę ABC. Udowodnij, że punkt T jest ortocentrum trójkąta ABC.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Drugie zawody indywidualne

9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^{2013} = b + b^{2013} \\ b^{2013} = c + c^{2013} \\ c^{2013} = d + d^{2013} \\ d^{2013} = e + e^{2013} \\ e^{2013} = a + a^{2013} \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e.

10. Udowodnij, że równanie

$$(a-b)^9 = a^4 b^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b.

11. Na płaszczyźnie wybrano 4026 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Następnie 2013 z tych punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe 2013 punktów na niebiesko. Udowodnij, że można te punkty tak połączyć 2013 odcinkami w pary, aby każdy z odcinków miał na końcach punkty różnych kolorów i aby przy tym żadne dwa odcinki się nie przecinały.

12. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q są ortocentrami trójkątów ABC i ABD. Wykaż, że $CD = PQ$.

Trzecie zawody indywidualne

13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że

$$(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n.$$

14. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba $2^n - n$ jest podzielna przez p.

15. Niech o będzie okręgiem opisanym na prostokącie $ABCD$, punkt L punktem na tym łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktu A. Proste AL i DC przecinają się w punkcie K, proste AD i CL przecinają się w punkcie M, proste MK i BC przecinają się w punkcie N. Udowodnij, że punkty M, L, N, B leżą na jednym okręgu.

16. Podstawą ostrosłupa $SABCD$ jest równoległobok $ABCD$. Udowodnij, że dla dowolnego punktu O leżącego wewnątrz tego ostrosłupa prawdziwa jest równość

$$V_{OSAB} + V_{OSCD} = V_{OSBC} + V_{OSDA},$$

gdzie V_{XYZT} oznacza objętość czworościanu $XYZT$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czwarte zawody indywidualne

17. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0\,.$$

Wykaż, że

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \geqslant 4abcd.$$

18. Udowodnij, że równanie

$$a^3+b^3+2=c^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

19. Czy istnieje sześcian o krawędzi długości niecałkowitej, którego powierzchnię można okleić prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×6?

Uwaga: Każdy pasek papieru musi być przyklejony całą swoją powierzchnią do sześcianu (niekoniecznie do jednej ściany). Pasków papieru nie można rozdzierać, nie można naklejać jednego paska na drugi, ani nie można sklejać paska samego ze sobą.

20. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle DAQ=\sphericalangle BAC$, to $\sphericalangle CBD=\sphericalangle ABP$.

21. Okręgi o_1, o_2, o_3 o promieniach odpowiednio $r_1>r_2>r_3$ są parami styczne wewnętrznie w punkcie K. Punkty A, B, C leżą na okręgu o_1, przy czym odcinek AB jest styczny do okręgu o_2 w punkcie P, a odcinek BC jest styczny do okręgu o_3 w punkcie Q. Prosta PQ przecina drugi raz okrąg o_3 w punkcie R. Udowodnij, że prosta AR jest styczna do okręgu o_3.

Mecz matematyczny

22. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$\left[m\sqrt{10}\right]=\left[n\sqrt{10}\right]+2m+4n$$

w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Uwaga: Zapis $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

23. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz=x^4+y^4+z^4+1. \end{cases}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

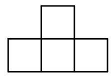
24. Udowodnij, że równanie

$$(a+b+c)^2 = abc$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

25. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, liczba n^2+n+k nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100.

26. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że szachownicę o boku n daje się rozciąć na kostki tetromina o polu 4 i kształcie jak na rysunku 1.



rys. 1

27. Klockiem nazwiemy bryłę powstałą z doklejenia sześcianów jednostkowych do trzech parami sąsiednich ścian sześcianu jednostkowego. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że prostopadłościan o wymiarach $2013 \times 2013 \times n$ daje się zbudować z klocków?

28. Udowodnij, że istnieje liczba naturalna m o następującej własności: każda liczba naturalna $n \geqslant m$ ma taką wielokrotność mniejszą od $n\sqrt[3]{n^2}$, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 5.

29. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie L. Punkt K jest obrazem symetrycznym punktu L względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykaż, że $BK \geqslant HL$.

30. Dany jest kwadrat $ABCD$. Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne KLM, że punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD. Wyznacz zbiór środków wszystkich odcinków KL.

31. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Punkty X i Y są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ACD i BCD. Prosta XY przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PCQ jest równoramienny.

32. Dany jest czworościan, w którym wszystkie ściany są trójkątami ostrokątnymi. Udowodnij, że można w taki sposób wybrać dwie przeciwległe krawędzie tego czworościanu, aby czworościan zawierał się w sumie kul, których średnicami są te krawędzie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego