

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy OMG

Poziom OMG
3–7 czerwca 2013



Warszawa, lipiec 2013 r.

Wydanie pilotażowe (niepoprawione)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych x równanie

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+17} + \sqrt{x+28} = 18.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$7a(b+c) \leq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n , liczba

$$\frac{(4n)! \cdot (n!)^2}{((2n)!)^3}$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

4. Liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}, m$ spełniają równanie

$$n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + \dots + n_{15}^4 = m^4.$$

Udowodnij, że wśród tych liczb co najwyżej dwie są nieparzyste.

5. W okrąg o promieniu 1 wpisano 666-kąt foremny. Wyznacz najmniejszą liczbę k o następującej własności: wśród dowolnie wybranych k wierzchołków tego wielokąta istnieją dwa wierzchołki odległe o 1.

6. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku A , wyznaczone przez proste k i l . Prosta k jest styczna do okręgu o_1 w punkcie K , a prosta l jest styczna do okręgu o_2 w punkcie L . Okręgi o_1 i o_2 leżą po tej samej stronie prostej m , która jest do nich styczna i przecina proste k i l odpowiednio w punktach B i C . Udowodnij, że $AK + AL = BC$.

7. Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB . Prosta prostopadła do boku AC przechodząca przez punkt A przecina prostą BC w punkcie D . Punkt E spełnia warunki:

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EBA = 90^\circ.$$

Punkt F leży na prostej AB , przy czym $BF = AD$, a punkt B leży na odcinku AF . Udowodnij, że $ED = EF$.

8. Równoległobok $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCD S$. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy są równe. Udowodnij, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

Drugie zawody indywidualne**9. Rozwiąż układ równań**

$$\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ bc + b + c = 5 \\ ca + c + a = 5 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c .

10. Dana jest szachownica o wymiarach 2014×2014 . Czy można tak ją pokryć kostkami domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

11. Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna k większa od 1, że równanie

$$n^{n^k} = m^m$$

ma co najmniej cztery rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych m, n .

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się „od góry”, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

12. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I . Punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC , a punkt M jest środkiem tego łuku AC okręgu o , do którego nie należy punkt B . Ponadto spełniony jest warunek $MI = MH$. Wyznacz miarę kąta $\angle ABC$.

Trzecie zawody indywidualne

13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n , że sumy cyfr liczb m^{2013} oraz n^{2013} różnią się o 2013.

14. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na odcinkach AP, BP, CP i spełniają warunki:

$$\frac{AX}{XP} = \frac{BY}{YP} = \frac{CZ}{ZP}.$$

Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków BC, CA, AB . Udowodnij, że proste XK, YL, ZM przecinają się w jednym punkcie.

15. Danych jest $2^{2013} + 1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych od $2^{4023} + 1$. Udowodnij, że spośród nich można wybrać takich sześć różnych liczb a, b, c, d, e, f , że

$$a + b = c + d = e + f.$$

16. Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami?

Czwarte zawody indywidualne

17. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

18. Szachownicę o wymiarach 14×14 pokryto 98 kostkami domina. Udowodnij, że istnieje taka prosta równoległa do pewnych dwóch boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która rozcina co najwyżej dwie kostki.

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

19. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku O . Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie M , a odcinki łączące środki jego przeciwległych boków przecinają się w punkcie N . Udowodnij, że $OM \geq ON$.

20. Wykaż, że równanie

$$2x^2 + 5y^2 = z^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z .

21. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1. Punkt P należy do wnętrza tego czworościanu. Suma odległości punktu P od krawędzi tego czworościanu jest równa s . Wykaż, że

$$s \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Mecz matematyczny

22. Czy liczba $7 + 5\sqrt{2}$ jest sumą liczb postaci $(x + y\sqrt{2})^2$, gdzie x, y są liczbami wymiernymi?

23. Okręgi o, p mają różne promienie i przecinają się w punktach A i B . Prosta k jest styczna do okręgów o i p odpowiednio w punktach M i N , a prosta l jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach O i P . Wykaż, że ortocentra trójkątów MNA, MNB, OPA i OPB są wierzchołkami prostokąta.

24. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność

$$\frac{m^m}{m!} \cdot \frac{n^n}{n!} < \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

25. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA i DAB są wierzchołkami prostokąta.

26. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a , b , c , d prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2 + b^2}{c + d} + \frac{a^2 + c^2}{d + b} + \frac{a^2 + d^2}{b + c} \geq 3a.$$

27. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się mniej niż $n/4$ zerami.

28. Na każdym polu szachownicy o wymiarach 2013×2013 znajduje się żarówka. Dla każdego rzędu poziomego, pionowego i ukośnego dysponujemy przełącznikiem, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) wszystkich żarówek w tym rzędzie. Rząd ukośny tworzą pola, których środki leżą na prostej przecinającej boki szachownicy pod kątem 45° . W szczególności rzędem jest pojedyncza żarówka w polu narożnym.

Początkowo zapalona jest żarówka w centralnym polu szachownicy, a pozostałe żarówki są zgaszone. Czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone?

29. Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci n^{n^k} , gdzie n , k są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2013 sposobów?

30. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na bokach tego czworokąta budujemy na zewnątrz takie prostokąty $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$, aby $BC = AR$, $CD = BL$, $DA = CN$, $AB = DP$. Udowodnij, że środki tych prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

31. Na stosie leży 2013 kamieni. Ruch polega na wykonaniu jednej z następujących operacji:

- rozdzielenie dowolnego stosu zawierającego co najmniej dwa kamienie na dwa niepuste stosy,
- przełożenie jednego kamienia z większego stosu na mniejszy, pod warunkiem, że przed wykonaniem ruchu liczby kamieni w tych stosach różniły się o więcej niż 1.

Czy zgodnie z powyższymi regułami można wykonać ciąg trzech milionów ruchów?

32. W czworoscianie $ABCD$ punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD . Płaszczyzna p przechodzi przez punkty K i L oraz przecina krawędzie BC i AD tego czworoscianu odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że środek odcinka EF leży na prostej KL .

Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie 1. Rozwiąż w dodatnich liczbach rzeczywistych x równanie

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+17} + \sqrt{x+28} = 18.$$

Rozwiązanie

Podstawiając $x = 8$ stwierdzamy, że lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{36} = 3 + 4 + 5 + 6 = 18,$$

skąd wniosek, że $x = 8$ jest rozwiązaniem danego równania.

Zauważmy, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x, s, t z nierówności $x < t$ wynika

$$\sqrt{x+s} < \sqrt{t+s},$$

natomiast nierówność $x > t$ pociąga

$$\sqrt{x+s} > \sqrt{t+s}.$$

Stąd wniosek, że dla $x < 8$ mamy

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+17} + \sqrt{x+28} < \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{36} = 18,$$

zaś dla $x > 8$ otrzymujemy

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+17} + \sqrt{x+28} > \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{36} = 18.$$

To oznacza, że $x = 8$ jest jedynym rozwiązaniem danego równania.

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$7a(b+c) \leq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Z nierówności $(a - b\sqrt{2})^2 \geq 0$ otrzymujemy $a^2 - 2\sqrt{2}ab + 2b^2 \geq 0$, skąd

$$ab \leq \frac{a^2}{2\sqrt{2}} + \frac{b^2}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$ac \leq \frac{a^2}{2\sqrt{2}} + \frac{c^2}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Dodanie stronami nierówności (1) i (2) prowadzi do

$$a(b+c) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2}}.$$

Wykorzystując nierówność

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5,$$

dostajemy

$$7a(b+c) \leq \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) < 5 \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

co należało wykazać.

Sposób II

Z nierówności $(5a - 7b)^2 \geq 0$ otrzymujemy $25a^2 - 70ab + 49b^2 \geq 0$, skąd

$$7ab \leq \frac{5a^2}{2} + \frac{49b^2}{10}. \quad (3)$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$7ac \leq \frac{5a^2}{2} + \frac{49c^2}{10}. \quad (4)$$

Dodanie stronami nierówności (3) i (4) prowadzi do

$$7a(b+c) \leq 5a^2 + \frac{49b^2}{10} + \frac{49c^2}{10} \leq 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 = 5 \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

co należało udowodnić.

Sposób III

Z nierówności $(7a - 10b)^2 \geq 0$ dostajemy $49a^2 - 140ab + 100b^2 \geq 0$, skąd

$$7ab \leq \frac{49a^2}{20} + 5b^2. \quad (5)$$

Analogicznie uzyskujemy nierówność

$$7ac \leq \frac{49a^2}{20} + 5c^2. \quad (6)$$

Po dodaniu stronami nierówności (5) i (6) otrzymujemy

$$7a(b+c) \leq \frac{49a^2}{10} + 5b^2 + 5c^2 \leq 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 = 5 \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

co należało wykazać.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n , liczba

$$\frac{(4n)! \cdot (n!)^2}{((2n)!)^3}$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego ma nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG (seria VII, styczeń 2013):

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^4} \right\rfloor + \dots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x .

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Niech w będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $n!$. Na mocy lematu mamy

$$w = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \left[\frac{n}{16} \right] + \dots$$

Ponadto liczba 2 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $(2n)!$ z wykładnikiem

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2n}{2} \right] + \left[\frac{2n}{4} \right] + \left[\frac{2n}{8} \right] + \left[\frac{2n}{16} \right] + \left[\frac{2n}{32} \right] + \dots = \\ & = [n] + \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \left[\frac{n}{16} \right] + \dots = n + w, \end{aligned}$$

a do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $(4n)!$ z wykładnikiem

$$\begin{aligned} & \left[\frac{4n}{2} \right] + \left[\frac{4n}{4} \right] + \left[\frac{4n}{8} \right] + \left[\frac{4n}{16} \right] + \left[\frac{4n}{32} \right] + \left[\frac{4n}{64} \right] + \dots = \\ & = [2n] + [n] + \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \left[\frac{n}{16} \right] + \dots = 3n + w. \end{aligned}$$

Zatem przed uproszczeniem danego w zadaniu ułamka liczba 2 występuje w liczniku z wykładnikiem

$$3n + w + 2w = 3n + 3w,$$

a w mianowniku z wykładnikiem

$$3(n + w) = 3n + 3w.$$

Ponieważ oba wykładniki są równe, po uproszczeniu ułamek będzie miał nieparzysty licznik i nieparzysty mianownik.

Zadanie 4. Liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}, m$ spełniają równanie

$$n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 + \dots + n_{15}^4 = m^4.$$

Udowodnij, że wśród tych liczb co najwyżej dwie są nieparzyste.

Rozwiązanie

Jeżeli liczba całkowita n jest parzysta, to liczba n^4 jest podzielna przez 16. Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to

$$n^4 - 1 = (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1),$$

gdzie iloczyn po prawej stronie ma trzy czynniki parzyste, a ponadto jeden z pierwszych dwóch czynników jest podzielny przez 4. Zatem w tym przypadku liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 16, a w konsekwencji liczba n^4 przy dzieleniu przez 16 daje resztę 1.

Tak więc dla dowolnej liczby całkowitej n , liczba n^4 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 0 lub 1, zależnie od parzystości liczby n .

Niech teraz liczby całkowite $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}, m$ spełniają równanie dane w treści zadania.

Jeżeli liczba m jest parzysta, to prawa strona równania jest podzielna przez 16, a zatem liczba składników nieparzystych występujących po lewej stronie jest podzielna przez 16, jest więc równa zero jako liczba nie większa od 15. W tym przypadku wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}, m$ są parzyste.

Jeśli zaś liczba m jest nieparzysta, to prawa strona równania przy dzieleniu przez 16 daje resztę 1. Zatem liczba składników nieparzystych występujących po lewej stronie także daje resztę 1 przy dzieleniu przez 16. Jest więc równa jeden jako liczba nie większa od 15. W tym przypadku liczba m oraz dokładnie jedna z liczb $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}$ są nieparzyste.

Udowodniliśmy, że wśród liczb $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{15}, m$ są dokładnie dwie liczby nieparzyste albo nie ma żadnej liczby nieparzystej.

Zadanie 5. W okrąg o promieniu 1 wpisano 666-kąt foremny. Wyznacz najmniejszą liczbę k o następującej własności: wśród dowolnie wybranych k wierzchołków tego wielokąta istnieją dwa wierzchołki odległe o 1.

Rozwiązanie

Niech $A_1 A_2 A_3 \dots A_{666}$ będzie danym 666-kątem foremnym. Wówczas dla $i = 1, 2, 3, \dots, 111$ wierzchołki $A_i, A_{i+111}, A_{i+222}, A_{i+333}, A_{i+444}$ i A_{i+555} są wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku 1. Dwa wierzchołki 666-kąta są odległe o 1 wtedy i tylko wtedy, gdy są sąsiednimi wierzchołkami jednego ze 111 opisanych wyżej sześciokątów foremných.

Wykażemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $k = 334$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że przy dowolnym pomalowaniu 334 wierzchołków 666-kąta, co najmniej jeden sześciokąt ma pomalowane co najmniej cztery wierzchołki — wśród tych wierzchołków muszą być dwa sąsiednie, a więc odległe o 1. Z kolei liczba 333 nie spełnia warunków zadania, gdyż można pomalować co drugi wierzchołek każdego ze 111 sześciokątów foremných — wówczas pomalowane będą 333 wierzchołki, ale żadne dwa z nich nie będą odległe o 1.

Zadanie 6. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku A , wyznaczone przez proste k i l . Prosta k jest styczna do okręgu o_1 w punkcie K , a prosta l jest styczna do okręgu o_2 w punkcie L . Okręgi o_1 i o_2 leżą po tej samej stronie prostej m , która jest do nich styczna i przecina proste k i l odpowiednio w punktach B i C . Udowodnij, że $AK + AL = BC$.

Rozwiązanie

Prostą m można wybrać na dwa sposoby, wybór ten nie zmienia jednak długości odcinka BC . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że wybraliśmy prostą m tak, aby punkty K i L leżały odpowiednio na odcinkach AB i AC . Oznaczmy przez M i N punkty styczności prostej m odpowiednio z okręgami o_1 i o_2 . Przez

P oznaczmy punkt styczności prostej l z okręgiem o_1 , a przez Q oznaczmy punkt styczności prostej k z okręgiem o_2 . Wówczas

$$AK + AL + CL = AP + AC = CP = CM = BC + BK$$

oraz

$$AK + AL + BK = AB + AQ = BQ = BN = BC + CL.$$

Po dodaniu tych równości stronami i zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymujemy tezę.

Zadanie 7. Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB . Prosta prostopadła do boku AC przechodząca przez punkt A przecina prostą BC w punkcie D . Punkt E spełnia warunki:

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EBA = 90^\circ.$$

Punkt F leży na prostej AB , przy czym $BF = AD$, a punkt B leży na odcinku AF . Udowodnij, że $ED = EF$.

Rozwiązanie

Trójkąty EBF i ECB są prostokątne, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$EF^2 = EB^2 + BF^2 = CE^2 + BC^2 + BF^2.$$

Trójkąty ECD i CAD także są prostokątne, zatem korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$ED^2 = EC^2 + CD^2 = CE^2 + AC^2 + AD^2.$$

Korzystając z równości $BC = AC$ i $BF = AD$ otrzymamy tezę.

Zadanie 8. Równoległobok $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy są równe. Udowodnij, że równoległobok $ABCD$ jest rombem.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez p i q płaszczyzny przechodzące przez punkt S , prostopadłe odpowiednio do prostych AB i BC . Wówczas płaszczyzna p jest także prostopadła do prostej CD , ponieważ $CD \parallel AB$. Analogicznie płaszczyzna q jest prostopadła do prostej AD . Oznaczmy przez K i L punkty przecięcia płaszczyzny p odpowiednio z prostymi AB i CD , a przez M i N punkty przecięcia płaszczyzny q z prostymi odpowiednio BC i AD .

Proste KL i KS są prostopadłe do AB , ponieważ należą do płaszczyzny prostopadłej do prostej AB . Wobec tego, kąt SKL jest kątem dwuściennym między ścianami ABS i $ABCD$. Analogicznie kąty SLK , SNM , SMN są odpowiednimi kątami dwuściennymi. Kąty te są równe, więc trójkąty SKL i SMN są podobne na cechy podobieństwa trójkątów kąt-kąt-kąt. Co więcej, wysokość trójkąta SKL , opuszczona z wierzchołka S , jest prostopadła do prostej KL oraz do prostej AB , bo należy do płaszczyzny p , więc jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Wobec tego wysokość ta pokrywa się z wysokością ostrosłupa $ABCDS$.

Analogicznie wysokość opuszczona z wierzchołka S w trójkącie SMN pokrywa się z tą samą wysokością ostrosłupa. Odpowiednie wysokości w trójkątach podobnych SKL i SMN się pokrywają, więc trójkąty te są przystające. Stąd $KL = MN$. Pozostaje zauważyć, że odcinki KL i MN są prostopadłe odpowiednio do prostych AB i BC , więc są wysokościami w równoległoboku $ABCD$. Jeśli wysokości w równoległoboku są równej długości, to równoległobok ten musi być rombem.

Drugie zawody indywidualne

Zadanie 9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ab + a + b = 1 \\ bc + b + c = 5 \\ ca + c + a = 5 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c .

Rozwiązanie

Dodajmy 1 do obu stron każdego równania i przepiszyśmy dany układ w równoważnej postaci

$$\begin{cases} (a+1)(b+1) = 2 \\ (b+1)(c+1) = 6 \\ (c+1)(a+1) = 6. \end{cases} \quad (7)$$

Mnożąc stronami pierwsze dwa równania dostajemy

$$(a+1)(c+1)(b+1)^2 = 12,$$

skąd na mocy trzeciego równania otrzymujemy $(b+1)^2 = 2$. Analogicznie stwierdzamy, że $(c+1)^2 = 18$ oraz $(a+1)^2 = 2$. W takim razie

$$(a, b, c) = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}-1) \quad \text{lub} \quad (a, b, c) = (-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1, -3\sqrt{2}-1).$$

Z drugiej strony bezpośrednio sprawdzamy, że tak otrzymane trójki liczb spełniają układ (7), a więc są jedynymi rozwiązaniami układu równań danego w treści zadania.

Odpowiedź

Dane równanie ma dwa rozwiązania

$$(a, b, c) = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}-1) \quad \text{lub} \quad (a, b, c) = (-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1, -3\sqrt{2}-1).$$

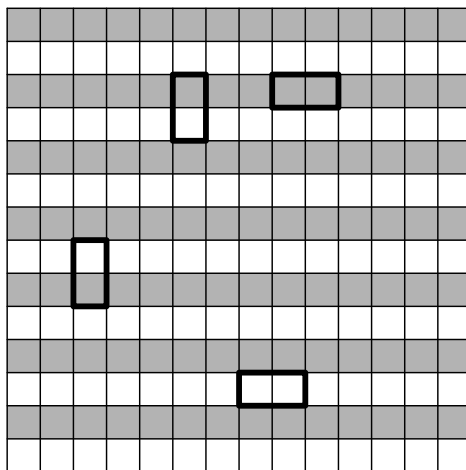
Zadanie 10. Dana jest szachownica o wymiarach 2014×2014 . Czy można tak ją pokryć kostkami domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

Rozwiązanie

Wykażemy, że takie pokrycie nie jest możliwe.

W tym celu pomalujmy szachownicę w poziome pasy o szerokości 1 jak na rysunku 1, gdzie sposób pokolorowania zilustrowano na przykładzie szachownicy o wymiarach 14×14 .



rys. 1

Zauważmy, że każda kostka domina ułożona poziomo pokrywa dwa pola tego samego koloru, a kostka ułożona pionowo pokrywa pola różnych kolorów. Ponieważ szachownica zawiera parzyście wiele pól każdego koloru, w każdym jej pokryciu kostkami domina, parzyście wiele kostek ułożonych jest pionowo. Tymczasem połowa liczby kostek potrzebnych do pokrycia szachownicy wynosi 1007^2 , jest więc nieparzysta.

Zadanie 11. Wykaż, że istnieje taka liczba naturalna k większa od 1, że równanie

$$n^{n^k} = m^m$$

ma co najmniej cztery rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych m, n .

Uwaga: Potęgowanie wykonuje się „od góry”, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $m = n^{n^t}$, gdzie t jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas

$$m^m = \left(n^{n^t}\right)^{n^{n^t}} = n^{n^t \cdot n^{n^t}} = n^{n^{t+n^t}},$$

skąd wynika, że liczby m, n spełniają dane w zadaniu równanie dla $k = t + n^t$.

Dla dowolnego $k > 2$ otrzymujemy więc co najmniej dwa rozwiązania danego równania, odpowiednio dla $n = 1, t = k - 1$ oraz $n = k - 1, t = 1$:

$$n = 1, \quad m = 1$$

oraz

$$n = k - 1, \quad m = (k - 1)^{k-1}.$$

Więcej rozwiązań otrzymamy dla liczb k postaci $t + n^t$, gdzie n, t są większe od 1.

Zauważmy, że liczba $k = 11$ daje się zapisać w powyższej postaci na dwa sposoby, mamy bowiem $11 = 2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Odpowiedź

Dla $k = 11$ dane w zadaniu równanie ma co najmniej cztery rozwiązania:

$$\begin{aligned} n = 1, \quad m = 1; \\ n = 10, \quad m = 10^{10}; \\ n = 2, \quad m = 2^{2^3} = 2^8 = 256; \\ n = 3, \quad m = 3^{3^2} = 3^9. \end{aligned}$$

Uwaga

Nie wiadomo, czy $k = 11$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

Zadanie 12. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I . Punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC , a punkt M jest środkiem tego łuku AC okręgu o , do którego nie należy punkt B . Ponadto spełniony jest warunek $MI = MH$. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle ABC$.

Rozwiązanie

Punkty M i I leżą na dwusiecznej kąta ABC . Ponadto zauważmy, że $MA = MC = MI$. Istotnie: pierwsza równość jest spełniona. Aby uzasadnić drugą, przeprowadźmy następujący rachunek na kątach

$$\sphericalangle ICM = \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACM = \sphericalangle ICB + \sphericalangle MBA = \sphericalangle ICB + \sphericalangle IBC = \sphericalangle CIM.$$

Wobec tego trójkąt IMC jest równoramienny, czyli $MC = MI$.

Punkty A, I, H oraz C leżą zatem na okręgu o środku M i promieniu MI , ponadto punkty H oraz I leżą po tej samej stronie prostej AC co punkt B . Stąd $\sphericalangle CHA = \sphericalangle CIA$. Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle CIA &= 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BCA - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC, \\ \sphericalangle CHA &= 180^\circ - \sphericalangle HCA - \sphericalangle HAC = \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC. \end{aligned}$$

Wobec tego mamy

$$90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ABC,$$

czyli $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie 13. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n , że sumy cyfr liczb m^{2013} oraz n^{2013} różnią się o 2013.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że sześcian dowolnej liczby całkowitej jest podzielny przez 9 albo sąsiaduje z liczbą podzielną przez 9. Spostrzeżenie to wynika z następujących tożsamości:

$$(3k)^3 = 9 \cdot 3k^3,$$

$$(3k \pm 1)^3 = 9 \cdot (3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1.$$

Ponieważ wykładnik 2013 jest podzielny przez 3, liczby m^{2013} oraz n^{2013} są sześcianami dodatnich liczb całkowitych, a więc każda z nich jest podzielna przez 9 albo sąsiaduje z wielokrotnością dziewiątki. Na podstawie cechy podzielności przez 9 wnioskujemy, że także sumy cyfr tych liczb są odpowiednio podzielne przez 9 albo sąsiadują z liczbami podzielnymi przez 9. Różnica dwóch takich liczb może dawać przy dzieleniu przez 9 jedną z reszt: 0, 1, 2, 7, 8. Nie może więc być równa 2013, gdyż ta liczba daje przy dzieleniu przez 9 resztę 6.

Odpowiedź

Liczb o podanej własności nie istnieją.

Zadanie 14. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na odcinkach AP, BP, CP i spełniają warunki:

$$\frac{AX}{XP} = \frac{BY}{YP} = \frac{CZ}{ZP}.$$

Punkty K, L, M są środkami odpowiednio odcinków BC, CA, AB . Udowodnij, że proste XK, YL, ZM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy następujące równoległości

$$AB \parallel XY, \quad BC \parallel YZ, \quad CA \parallel ZX.$$

Ponadto z tego samego twierdzenia otrzymujemy jeszcze

$$AB \parallel KL, \quad BC \parallel LM, \quad CA \parallel MK.$$

Wobec tego mamy

$$KL \parallel XY, \quad LM \parallel YZ, \quad MK \parallel ZX,$$

a stąd wynika, że trójkąty KLM i XYZ są jednokładne, czyli proste XK, YL oraz ZM przecinają się w jednym punkcie, dokładnie w środku jednokładności, która przekształca trójkąt KLM na XYZ .

Zadanie 15. Danych jest $2^{2013} + 1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych od $2^{4023} + 1$. Udowodnij, że spośród nich można wybrać takich sześć różnych liczb a, b, c, d, e, f , że

$$a + b = c + d = e + f.$$

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie nieuporządkowane pary różnych spośród danych

liczb. Par tych jest

$$\binom{2^{2013}+1}{2} = \frac{(2^{2013}+1) \cdot 2^{2013}}{2} = 2^{4025} + 2^{2012}.$$

Suma liczb każdej pary jest nie mniejsza niż 3 i nie większa niż

$$(2^{4023}+1) + 2^{4023} = 2^{4024} + 1.$$

Sumy te mogą zatem przyjmować

$$2^{4024} + 1 - 3 + 1 = 2^{4024} - 1$$

dopuszczalnych wartości. Ponieważ liczba par jest ponad dwukrotnie większa od tej liczby, z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją trzy pary o takiej samej sumie. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że różne pary o takiej samej sumie mają wszystkie elementy różne.

Zadanie 16. Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami?

Rozwiązanie

Nie istnieje. Oznaczmy przez K liczbę krawędzi wielościanu, a przez S liczbę jego ścian. Jeśli wszystkie ściany są trójkątne, zachodzi zależność $2K = 3S$, ponieważ każda krawędź sąsiaduje z dwoma ścianami, a każda ściana sąsiaduje z trzema krawędziami. Wobec tego liczba $3S$ musi być parzysta, więc liczba ścian także musi być parzysta.

Czwarte zawody indywidualne

Zadanie 17. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$\frac{a}{(b+c-a)^2} + \frac{b}{(c+a-b)^2} + \frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych u i v zachodzą nierówności

$$\frac{u}{4v^2} + \frac{v}{4u^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

oraz

$$u+v \geq 2\sqrt{uv}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2\sqrt{uv}} \geq \frac{1}{u+v}.$$

Podstawmy

$$\frac{b+c-a}{2} = x, \quad \frac{c+a-b}{2} = y, \quad \frac{a+b-c}{2} = z.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że liczby x, y, z są dodatnie, a dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$\frac{y+z}{4x^2} + \frac{z+x}{4y^2} + \frac{x+y}{4z^2} \geq \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}.$$

Wykorzystując przytoczone na początku nierówności dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{4x^2} + \frac{z+x}{4y^2} + \frac{x+y}{4z^2} &= \left(\frac{y}{4x^2} + \frac{x}{4y^2} \right) + \left(\frac{z}{4y^2} + \frac{y}{4z^2} \right) + \left(\frac{x}{4z^2} + \frac{z}{4x^2} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{yx}} + \frac{1}{2\sqrt{xz}} + \frac{1}{2\sqrt{zy}} \geq \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}. \end{aligned}$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 18. Szachownicę o wymiarach 14×14 pokryto 98 kostkami domina. Udowodnij, że istnieje taka prosta równoległa do pewnych dwóch boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która rozcina co najwyżej dwie kostki.

Uwaga: Każda kostka domina pokrywa dwa pola szachownicy.

Rozwiązanie

Każda z 13 prostych poziomych i 13 prostych pionowych przechodzących przez wnętrze szachownicy, biegnących wzdłuż linii podziału pól, przecina parzyście wiele kostek domina, gdyż dzieli szachownicę na dwa prostokąty o parzystych polach. Ponieważ $4 \cdot 26 = 104 > 98$, co najmniej jedna z opisanych wyżej 26 prostych przecina mniej niż 4 kostki domina. Skoro jednak liczba rozcinanych przez nią kostek jest parzysta, prosta ta przecina co najwyżej dwie kostki.

Zadanie 19. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku O . Przekątne tego czworokąta przecinają się w punkcie M , a odcinki łączące środki jego przeciwległych boków przecinają się w punkcie N . Udowodnij, że $OM \geq ON$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P, Q, R, S, T, U odpowiednio środki odcinków AB, BC, CD, DA, AC, BD . Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa otrzymujemy równoległości:

$$SR \parallel AC \parallel PQ, \quad PS \parallel BD \parallel QR,$$

więc czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, a punkt przecięcia jego przekątnych N jest środkiem odcinka PR . Analogicznie otrzymujemy równoległości odcinków:

$$PT \parallel BC \parallel UR, \quad PU \parallel AD \parallel TR,$$

skąd możemy wywnioskować, że czworokąt $PURT$ jest równoległobokiem. Zatem środek odcinka PR , czyli punkt N jest także środkiem odcinka TU . Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a odcinki AC i BD są jego cięciwami, więc $OT \perp AC$ oraz $OU \perp BD$. Stąd wniosek, że punkty U i T leżą na okręgu o średnicy OM . Punkt N , jako środek odcinka UT , leży wewnątrz tego okręgu lub na nim, więc długość odcinka ON nie przekracza długości średnicy OM .

Zadanie 20. Wykaż, że równanie

$$2x^2 + 5y^2 = z^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z .

*Rozwiązanie**Sposób I*

Przypuśćmy, że istnieją trójki (x, y, z) dodatnich liczb całkowitych spełniające powyższe równanie. Wybierzmy wśród nich taką, dla której wartość liczby z jest minimalna. Wówczas

$$2x^2 \equiv z^2 \pmod{5}.$$

Z tożsamości

$$\begin{aligned}(5k)^2 &= 5 \cdot (5k^2), \\ (5k \pm 1)^2 &= 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 1, \\ (5k \pm 2)^2 &= 5 \cdot (5k^2 \pm 4k) + 4.\end{aligned}$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych dają reszty 0, 1, 4 z dzielenia przez 5. Stąd wniosek, że dana kongruencja może być prawdziwa jedynie wtedy, gdy obie liczby x^2 i z^2 są podzielne przez 5 — innymi słowy, gdy obie liczby x i z są podzielne przez 5. W takim razie $x = 5x_1$ i $z = 5z_1$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x_1 i z_1 . Wówczas dane w zadaniu równanie przyjmuje postać

$$2 \cdot (5x_1)^2 + 5y^2 = (5z_1)^2, \quad \text{czyli} \quad 10x_1^2 + y^2 = 5z_1^2.$$

Stąd wynika, że liczba y jest podzielna przez 5, a zatem $y = 5y_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej y_1 . Otrzymujemy

$$2x_1^2 + 5y_1^2 = z_1^2.$$

Trójka (x_1, y_1, z_1) spełnia więc dane w treści zadania równanie, a przy tym $z_1 < z$. To jest sprzeczne z założeniem minimalności z w trójce (x, y, z) , a zatem uczynione na początku przypuszczenie o istnieniu rozwiązań danego równania było fałszywe. W takim razie dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Sposób II

Rozumujemy podobnie jak w sposobie I, przy czym opieramy się na kongruencji modulo 8 zamiast modulo 5. Z tożsamości

$$\begin{aligned}(4k)^2 &= 8 \cdot (2k^2), \\ (4k + 2)^2 &= 8 \cdot (2k^2 + 2k) + 4, \\ (4k \pm 1)^2 &= 8 \cdot (2k^2 \pm k) + 1,\end{aligned}$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych dają reszty 0, 1, 4 z dzielenia przez 8. Zatem możliwe reszty z dzielenia składników występujących w danym równaniu przez 8 są następujące:

- dla liczby $2x^2$ są to 0, 2,
- dla liczby $5y^2$ są to 0, 4, 5,
- dla liczby z^2 są to 0, 1, 4.

Stąd wynika, że równanie dane w treści zadania może być spełnione tylko w przypadku, gdy

$$2x^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

oraz

$$5y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod{8} \quad \text{albo} \quad 5y^2 \equiv z^2 \equiv 4 \pmod{8}.$$

Zatem każde rozwiązanie (x, y, z) danego równania musi składać się z trzech liczb parzystych.

Dalsza część rozumowania przebiega analogicznie jak w sposobie I — jeżeli trójka liczb (x, y, z) jest rozwiązaniem równania, to rozwiązaniem jest także trójka mniejszych liczb $(x/2, y/2, z/2)$.

Zadanie 21. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1. Punkt P należy do wnętrza tego czworościanu. Suma odległości punktu P od krawędzi tego czworościanu jest równa s . Wykaż, że

$$s \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Rozwiązanie

Opiszmy na tym czworościanie równoległoscian. Jest to czworościan foremny, więc równoległoscian jest sześcianiem. Co więcej, długość krawędzi tego sześcianu to $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Oznaczmy wierzchołki tego czworościanu przez A, B, C, D . Wykażemy najpierw, że suma odległości punktu P od krawędzi AB i CD jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Oznaczmy przez p i q płaszczyzny sześcianu opisanego zawierające odcinki odpowiednio AB i CD . Płaszczyzny p i q są równoległe. Odległość punktu P od odcinka AB jest nie mniejsza od odległości punktu P od płaszczyzny p . Podobnie, odległość punktu P od odcinka CD jest nie mniejsza od odległości tego punktu od płaszczyzny q . Wobec tego suma tych odległości jest nie mniejsza od odległości między płaszczyznami p i q , a ta wynosi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, czyli tyle, ile długość krawędzi sześcianu.

Analogicznie dowodzimy, że suma odległości punktu P od krawędzi AC i BD jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oraz suma odległości punktu P od krawędzi AD i BC jest nie mniejsza od $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wobec tego suma wszystkich odległości jest nie mniejsza od $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Mecz matematyczny

Zadanie 22. Czy liczba $7 + 5\sqrt{2}$ jest sumą liczb postaci $(x + y\sqrt{2})^2$, gdzie x, y są liczbami wymiernymi?

Rozwiązanie

Gdyby dla pewnych liczb wymiernych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodziła równość

$$7 + 5\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^2 + (x_2 + y_2\sqrt{2})^2 + \dots + (x_n + y_n\sqrt{2})^2,$$

to mielibyśmy również

$$7 - 5\sqrt{2} = (x_1 - y_1\sqrt{2})^2 + (x_2 - y_2\sqrt{2})^2 + \dots + (x_n - y_n\sqrt{2})^2.$$

Jednak powyższa równość nie może mieć miejsca, gdyż liczba

$$7 - 5\sqrt{2} = \sqrt{49} - \sqrt{50}$$

jako liczba ujemna nie jest sumą kwadratów liczb rzeczywistych.

Odpowiedź

Liczba $7 + 5\sqrt{2}$ nie jest sumą liczb postaci podanej w zadaniu.

Zadanie 23. Okręgi o , p mają różne promienie i przecinają się w punktach A i B . Prosta k jest styczna do okręgów o i p odpowiednio w punktach M i N , a prosta l jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach O i P . Wykaż, że ortocentra trójkątów MNA , MNB , OPA i OPB są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy ortocentra trójkątów MNA i MNB przez odpowiednio G i H . Udowodnimy najpierw, że czworokąt $AGBH$ jest równoległobokiem. Zauważmy, że

$$\sphericalangle MGN = 180^\circ - \sphericalangle MAN = \sphericalangle AMN + \sphericalangle ANM = \sphericalangle ABM + \sphericalangle ABN = \sphericalangle MBN.$$

Wobec tego na czworokącie $MBGN$ można opisać okrąg q . Oznaczmy przez A' i H' odpowiednio odbicia punktów A i H względem prostej MN . Wówczas A' i G' leżą odpowiednio na prostych AG i BH .

$$\sphericalangle MH'N = 180^\circ - \sphericalangle MBN = 180^\circ - \sphericalangle MGN = \sphericalangle MA'N,$$

więc punkty A' i H' leżą na okręgu q . Proste AG i BH są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej MN . Wobec tego czworokąt $GA'H'B$ jest trapezem wpisanym w okrąg, czyli trapezem równoramiennym. Zatem zachodzi równość:

$$\sphericalangle BGA' = \sphericalangle H'A'G = \sphericalangle H'A'A = \sphericalangle HAA',$$

gdzie ostatnia równość wynika z symetrii względem prostej MN . Stąd wniosek, że $BG \parallel HA$, co w połączeniu z $AG \parallel BH$ daje nam, że czworokąt $AGBH$ jest równoległobokiem.

Wobec tego środek odcinka AB jest środkiem odcinka GH . Oznaczmy przez m prostą przechodzącą przez środki okręgów o i p . Okręgi o i p przejdą na siebie w symetrii względem prostej m , prosta k przejdzie na prostą l , a punkty A , M , N odpowiednio na punkty B , O , P . Wobec tego trójkąty OPA i OPB są symetryczne względem prostej m odpowiednio do trójkątów MNB i MNA . W szczególności odcinek łączący ortocentra trójkątów OPA i OPB jest symetryczny względem prostej m do odcinka HG . Czworokąt zbudowany z ortocentrów trójkątów z zadania ma zatem oś symetrii przechodzącą przez środek jednej z przekątnych. Stąd wniosek, że jest to też środek drugiej przekątnej, co więcej przekątne są równej długości. Czworokąt, w którym przekątne są równej długości i przecinają się w połowach jest prostokątem.

Zadanie 24. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność

$$\frac{m^m}{m!} \cdot \frac{n^n}{n!} < \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$(m+n)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} m^k n^{m+n-k}.$$

Ponieważ suma po prawej stronie ma co najmniej trzy składniki, a przy tym wszystkie jej składniki są dodatnie, jest ona większa od każdego swojego składnika, w szczególności od składnika odpowiadającego $k = m$. Mamy więc

$$\binom{m+n}{m} \cdot m^m \cdot n^n < (m+n)^{m+n},$$

co można przekształcić kolejno do:

$$\begin{aligned} \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!} \cdot m^m \cdot n^n &< (m+n)^{m+n}, \\ \frac{m^m}{m!} \cdot \frac{n^n}{n!} &< \frac{(m+n)^{m+n}}{(m+n)!}. \end{aligned}$$

Dowód nierówności danej w treści zadania jest więc zakończony.

Zadanie 25. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC , BCD , CDA i DAB są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki łuków AB i BC , niezawierających punktu D . Przez X, Y, Z oznaczmy środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty DAB , ABC i BCD . Wówczas $MA = MX = MY = MB$ oraz $NB = NY = NZ = NC$. W szczególności na czworokątach $AXYB$ oraz $BYZC$ można opisać okręgi. Zatem

$$180^\circ - \sphericalangle BYX = \sphericalangle BAX,$$

$$180^\circ - \sphericalangle BYZ = \sphericalangle BCZ.$$

Po dodaniu równości stronami otrzymujemy

$$360^\circ - \sphericalangle BYX - \sphericalangle BYZ = \sphericalangle BCZ + \sphericalangle BAX,$$

skąd

$$\sphericalangle XYZ = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD) = 90^\circ.$$

Wobec tego jeden z kątów czworokąta złożonego ze środków okręgów wpisanych jest prosty. Analogicznie dowodzimy, że pozostałe kąty są proste, co daje tezę.

Zadanie 26. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} + \frac{a^2+c^2}{d+b} + \frac{a^2+d^2}{b+c} \geq 3a.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \geq a+b - \frac{1}{2}(c+d). \quad (8)$$

Przekształcając równoważnie zapisujemy powyższą nierówność kolejno jako

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &\geq (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}(c+d)^2, \\ a^2+b^2 + \frac{1}{2}(c+d)^2 &\geq (a+b)(c+d). \end{aligned} \quad (9)$$

Zauważmy, że z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną wynika

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(a^2+b^2) \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2} \cdot 2ab = \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Stąd i ponownie z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$a^2+b^2 + \frac{1}{2}(c+d)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(c+d)^2 \geq (a+b)(c+d),$$

co daje nierówność (9) i tym samym kończy dowód nierówności (8).

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{a^2+c^2}{d+b} \geq a+c - \frac{1}{2}(d+b) \quad (10)$$

oraz

$$\frac{a^2+d^2}{b+c} \geq a+d - \frac{1}{2}(b+c). \quad (11)$$

Dodając stronami (8), (10) i (11) otrzymujemy nierówność daną w tezie zadania.

Zadanie 27. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się mniej niż $n/4$ zerami.

Rozwiązanie

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG (seria VII, styczeń 2013):

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p} \right] + \left[\frac{N}{p^2} \right] + \left[\frac{N}{p^3} \right] + \left[\frac{N}{p^4} \right] + \dots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x .

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

Z lematu wynika, że liczba 5 wchodzi do rozkładu liczby $n!$ z wykładnikiem

$$w = \left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{25} \right] + \left[\frac{n}{125} \right] + \left[\frac{n}{625} \right] + \dots + \left[\frac{n}{5^k} \right],$$

gdzie k jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $5^k \leq n$. Korzystając z oszacowania $[x] \leq x$ oraz ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego otrzymujemy

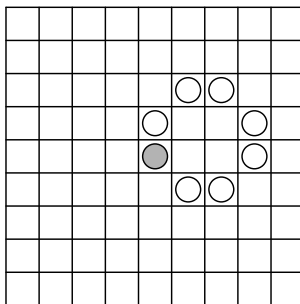
$$w \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{25} + \frac{n}{125} + \frac{n}{625} + \dots + \frac{n}{5^k} = \frac{n}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^k}}{1 - \frac{1}{5}} = n \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^k}}{5 - 1} = \frac{n}{4} - \frac{n}{4 \cdot 5^k} < \frac{n}{4}.$$

Ponieważ liczba zer końcowych w zapisie dziesiętnym dodatniej liczby całkowitej nie przekracza wykładnika, z jakim liczba 5 wchodzi do rozkładu tej liczby na czynniki pierwsze, liczba $n!$ ma mniej niż $n/4$ zer końcowych.

Zadanie 28. Na każdym polu szachownicy o wymiarach 2013×2013 znajduje się żarówka. Dla każdego rzędu poziomego, pionowego i ukośnego dysponujemy przełącznikiem, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) wszystkich żarówek w tym rzędzie. Rząd ukośny tworzą pola, których środki leżą na prostej przecinającej boki szachownicy pod kątem 45° . W szczególności rzędem jest pojedyncza żarówka w polu narożnym. Początkowo zapalona jest żarówka w centralnym polu szachownicy, a pozostałe żarówki są zgaszone. Czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone?

Rozwiązanie

Rozważmy 8 żarówek umieszczonych na polach pokazanych na rysunku 2, który przedstawia kwadratowy fragment szachownicy wokół jej centralnego pola, gdzie znajduje się jedyna zapalona żarówka.



rys. 2

Zauważmy, że każdy przełącznik albo nie zmienia stanu żadnej z tych żarówek, albo zmienia stan dokładnie dwóch. Zatem manipulowanie przełącz-

nikami nie zmienia parzystości liczby zapalonych żarówek. Skoro więc na początku zapalona była jedna żarówka, to nie można zgasić ośmiu wybranych żarówek, a tym bardziej nie można zgasić wszystkich żarówek na szachownicy.

Zadanie 29. Czy istnieje liczba naturalna większa od 1, którą można przedstawić w postaci n^k , gdzie n, k są dodatnimi liczbami całkowitymi, na co najmniej 2013 sposobów?

Rozwiązanie

Wykażemy, że taka liczba istnieje.

W tym celu przyjmijmy

$$n_1 = 2 \quad \text{oraz} \quad n_{i+1} = n_i^{n_i} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2012,$$

a także

$$k_{2013} = 1 \quad \text{oraz} \quad k_i = n_i k_{i+1} + 1 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2012.$$

Wówczas dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $i \leq 2012$ zachodzą równości

$$n_{i+1}^{k_{i+1}} = (n_i^{n_i})^{k_{i+1}} = n_i^{n_i \cdot k_{i+1}} = n_i^{1 + n_i \cdot k_{i+1}} = n_i^{k_i}.$$

Stąd wynika, że liczby $n_i^{k_i}$, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, 2013$, są równe.

Zadanie 30. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Na bokach tego czworokąta budujemy na zewnątrz takie prostokąty $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$, aby $BC=AR$, $CD=BL$, $DA=CN$, $AB=DP$. Udowodnij, że środki tych prostokątów są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez W , X , Y , Z odpowiednio środki prostokątów $ABLK$, $BCNM$, $CDPO$ i $DARQ$. Zauważmy, że prostokąty $ABLK$ i $DPOC$ są przystające, więc $AW = CY$ i $\sphericalangle WAB = \sphericalangle YCO$. Podobnie prostokąty $BCNM$ i $ARQD$ są przystające, czyli $AZ = CX$ i $\sphericalangle ZAD = \sphericalangle XCN$. Ponadto

$$\sphericalangle NCO = 360^\circ - \sphericalangle OCD - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BCN = 180^\circ - \sphericalangle DCN = \sphericalangle DAB.$$

Wobec tego $\sphericalangle XCY = \sphericalangle ZAW$, przy czym przez $\sphericalangle XCY$ mamy na myśli kąt zawierający punkty O i N , a przez $\sphericalangle ZAW$ rozumiemy kąt zawierający punkty B i D . Wówczas trójkąty ZAW i XCY są przystające z cechy bok-kąt-bok. Warto zwrócić uwagę, że kąt może być półpełny, ta cecha przystawania pozostaje wtedy w mocy. Wówczas $XY = ZW$ oraz $\sphericalangle AWZ = \sphericalangle CYX$. Analogicznie możemy udowodnić, że trójkąty WBX i YDZ są przystające, więc $WX = YZ$ oraz $\sphericalangle BWX = \sphericalangle DYZ$.

Stąd wniosek, że czworokąt $WXYZ$ jest równoległobokiem, wystarczy wykazać, że suma przeciwległych kątów wynosi 180° . Z przystawania prostokątów $ABLK$ i $DPOC$ mamy

$$\sphericalangle AWB + \sphericalangle CYD = 180^\circ.$$

Ponadto

$$\sphericalangle AWZ = \sphericalangle CYX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BWX = \sphericalangle DYZ.$$

Dokładnie jeden z kątów AWZ , CYX leży wewnątrz równoległoboku $WXYZ$. Podobnie z kątami BWX , DYZ . Wobec tego

$$\sphericalangle ZWX + \sphericalangle XYZ = \sphericalangle AWX \pm \sphericalangle AWZ + \sphericalangle CYZ \mp \sphericalangle CYX = \sphericalangle AWX + \sphericalangle CYZ = \\ = \sphericalangle AWB \pm \sphericalangle BWX + \sphericalangle CYD \mp \sphericalangle DYZ = \sphericalangle AWB + \sphericalangle CYD = 180^\circ.$$

Suma przeciwległych kątów w równoległoboku wynosi 180° , więc jest to prostokąt.

Zadanie 31. Na stosie leży 2013 kamieni. Ruch polega na wykonaniu jednej z następujących operacji:

- rozdzielenie dowolnego stosu zawierającego co najmniej dwa kamienie na dwa niepuste stosy,
- przełożenie jednego kamienia z większego stosu na mniejszy, pod warunkiem, że przed wykonaniem ruchu liczby kamieni w tych stosach różniły się o więcej niż 1.

Czy zgodnie z powyższymi regułami można wykonać ciąg trzech milionów ruchów?

Rozwiązanie

Rozważmy sumę kwadratów liczb kamieni w poszczególnych stosach. Wykażemy, że w każdym ruchu ta liczba zmniejsza się o co najmniej dwa.

I tak, przy dokonaniu rozdziału stosu złożonego z n kamieni na dwa stosy zawierające k oraz $n - k$ kamieni, suma kwadratów liczb kamieni zmniejsza się o

$$n^2 - (k^2 + (n - k)^2) = n^2 - k^2 - n^2 + 2kn - k^2 = 2kn - 2k^2 = 2(n - k)k \geq 2,$$

ponieważ zgodnie z warunkami zadania $n \geq 2$ oraz $1 \leq k \leq n - 1$.

Natomiast przełożenie kamienia ze stosu liczącego m kamieni na stos złożony z n kamieni zmniejsza sumę kwadratów liczb kamieni o

$$m^2 + n^2 - ((m - 1)^2 + (n + 1)^2) = m^2 + n^2 - m^2 + 2m - 1 - n^2 - 2n - 1 = \\ = 2(m - n) - 2 \geq 2 \cdot 2 - 2 = 2,$$

gdyż reguły wykonywania ruchów wymagają, aby $m \geq n + 2$.

Ponieważ na początku suma kwadratów liczb kamieni jest równa 2013^2 , a więc jest mniejsza od 6 000 000, nie jest możliwe wykonanie trzech milionów ruchów.

Zadanie 32. W czworoscianie $ABCD$ punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD . Płaszczyzna p przechodzi przez punkty K i L oraz przecina krawędzie BC i AD tego czworoscianu odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że środek odcinka EF leży na prostej KL .

Rozwiązanie

Opiszmy równoległościan na czworoscianie $ABCD$. Oznaczmy pozostałe wierzchołki tego równoległościanu przez A' , B' , C' , D' w taki sposób, żeby odcinki AA' , BB' , CC' , DD' nie były krawędziami równoległościanu.

Czworokąt $CA'DB'$ jest równoległobokiem, a punkt L jest środkiem odcinka CD , więc jest także środkiem odcinka $A'B'$. Krawędzie AB' oraz BA'

są równoległe i równej długości, więc czworokąt $ABA'B'$ jest równoległobokiem. Punkty K i L są środkami odcinków odpowiednio AB i $A'B'$, więc $KL \parallel AB' \parallel BA'$, a co za tym idzie, prosta KL jest równoległa do płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$.

Niech q oznacza płaszczyznę równoległą do płaszczyzny $AC'DB'$, przechodzącą przez prostą KL . Ponieważ $AK = KB$, więc płaszczyzna q jest równoodległa od płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$. Stąd wniosek, że dla dowolnej pary punktów X, Y należących odpowiednio do płaszczyzn $AC'DB'$ i $BA'CD'$ środek odcinka XY znajduje się na płaszczyźnie q . Punkt E leży na prostej BC' , więc leży też na płaszczyźnie $BA'CD'$. Z kolei punkt F leży na prostej AD , więc na płaszczyźnie $AC'DB'$. Wobec tego środek odcinka EF leży na płaszczyźnie q . Ponadto prosta EF jest zawarta w płaszczyźnie p , więc środek odcinka EF leży jednocześnie na płaszczyznach p i q . Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta KL , więc środek odcinka EF musi na niej leżeć.