STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Treści zadań Obozu Naukowego OMG

Poziom OMG
2016 rok

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

SZCZYRK 2016

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech punkt D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Symetralna odcinka AD przecina odcinki AB, AC, AD odpowiednio w punktach X, Y, Z. Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Udowodnij, że jeśli

$$[AXZ]+[ZDCY]=[AZY]+[ZXBD],$$

to trójkąt ABC jest równoramienny.

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność

$$16a \leqslant a^{16}+15.$$

3. Dodatnie liczby całkowite a i b są względnie pierwsze. Udowodnij, że największy wspólny dzielnik liczb $a+b$ oraz $a^{16}+b^{16}$ jest nie większy od 2.

4. Na zewnątrz rombu $ABCD$ zbudowano drugi romb $BCEF$, w którym $\sphericalangle EFB=\alpha$. Odcinki AC, DE przecinają się w punkcie G. Oblicz miarę kąta DGA.

5. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{n}$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par kolejnych liczb *superzłożonych*.

6. Kwadrat o boku 81 podzielono na prostokąty o wymiarach 1×3. Udowodnij, że liczba prostokątów ułożonych pionowo jest podzielna przez 3.

7. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAD+\sphericalangle ADC=120^\circ \quad \text{oraz} \quad AB=CD=1.$$

Punkty E, F są odpowiednio środkami przekątnych AC, BD. Oblicz długość odcinka EF.

8. Na obozie matematycznym jest 202 uczniów. Każdemu z nich przypisano liczbę jego znajomych wśród pozostałych uczestników. Rozstrzygnij, czy musi istnieć trójka uczniów, którym przypisano liczby dające tę samą resztę z dzielenia przez 101.

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli A jest znajomym B, to B jest znajomym A.

Drugie zawody indywidualne

9. Udowodnij, że liczba

$$81^9+36^9+16^9$$

jest złożona.

10. W Dakistanie jest 10 miast. Między każdymi dwoma miastami istnieją połączenia dwoma z czterech rodzajów komunikacji (kolejowe, drogowe, wodne, lotnicze). Udowodnij, że istnieją takie trzy miasta, że każde dwa z nich są połączone tym samym środkiem komunikacji.

11. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym kąt płaski BAC jest prosty oraz krawędź CD jest prostopadła do płaszczyzny ABC. Oblicz długość krawędzi CD wiedząc, że $AB=80$, $AC=60$ oraz promień sfery wpisanej w ten czworościan ma długość $\frac{60}{13}$.

12. Wyznacz liczbę par (m, n) liczb całkowitych spełniających równanie

$$m^2+12m=n^2+12.$$

Trzecie zawody indywidualne

13. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC=120°$. Na zewnątrz tego trójkąta zbudowano trójkąty równoboczne ABD, BCE, CAF. Udowodnij, że pole trójkąta BCE jest równe polu pięciokąta wklęsłego $ADBCF$.

14. Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $(4n)!$ jest podzielna przez liczbę $(6!)^n$.

15. Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $(54n)!$ jest podzielna przez liczbę $(56!)^n$.

16. W przestrzeni pokolorowano na fioletowo 129 różnych punktów kratowych, tzn. punktów o wszystkich trzech współrzędnych całkowitych. Udowodnij, że istnieje odcinek o fioletowych końcach zawierający co najmniej cztery inne (oprócz końców) punkty kratowe.

17. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty E i F należą odpowiednio do boków AC i AB oraz spełniają warunek $BF+CE=EF$. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle ABC=\sphericalangle AEF$, to środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC należy do odcinka EF.

Czwarte zawody indywidualne

18. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych o bokach długości całkowitej, w których długość co najmniej jednego boku jest liczbą pierwszą.

19. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$3\cdot\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)<a^2+b^2+c^2+3\cdot\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

20. Dane są dwa przystające okręgi o_1 i o_2 oraz takie punkty A i B, że A leży na okręgu o_1, a B leży na okręgu o_2. Punkty te poruszają się po odpowiednich okręgach z tą samą szybkością przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wykaż, że symetralne odcinków AB przechodzą przez stały punkt lub są równoległe.

21. Komisja Finansowa liczy sześć osób, w tym przewodniczący. Należy zamontować w skarbcu jak najmniejszą liczbę zamków i rozdać klucze członkom komisji tak, aby spełnione były następujące warunki:
- każdych czterech członków KF może otworzyć skarbiec,
- żadnych dwóch członków KF nie może otworzyć skarbca,
- trzech członków KF może otworzyć skarbiec wtedy i tylko wtedy, gdy wśród nich jest przewodniczący.

Wyznacz liczbę zamków, które należy zamontować w skarbcu.

22. Udowodnij, że istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że dla $k=1,2,3,4,5,6$ liczby

$$a_1^k+a_2^k+a_3^k+a_4^k+a_5^k+a_6^k+a_7^k$$

są podzielne przez p, ale liczba

$$a_1^7+a_2^7+a_3^7+a_4^7+a_5^7+a_6^7+a_7^7$$

nie jest podzielna przez p.

Mecz matematyczny

23. Liczbę całkowitą nazwiemy *fajną*, jeżeli jest postaci

$$a_1^{16}+a_2^{16}+a_3^{16}+\ldots+a_{61}^{16},$$

gdzie a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{61} są liczbami całkowitymi większymi od $16^{61^{16}}$. Rozstrzygnij, czy iloczyn dowolnych dwóch liczb *fajnych* jest *fajny*.

24. Punkt F jest środkiem boku BC trójkąta równobocznego ABC. Punkt D leży na odcinku AF. Punkt E leży po tej samej stronie prostej AF co punkt C i spełnia zależność $BD=DE=EA$. Oblicz miarę kąta CBE.

25. Liczbę pierwszą nazwiemy *klawą*, jeżeli jest dzielnikiem liczby

$$n^{16}+16n+1$$

dla pewnej liczby naturalnej n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb *klawych*.

26. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b i c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^4+b^4+c^4$ są podzielne przez p, ale liczba $a^{16}+b^{16}+c^{16}$ nie jest podzielna przez p.

27. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H ortocentrum. Dwusieczna kąta BAC przechodzi przez środek odcinka HO. Wyznacz miarę kąta BAC.

28. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\ldots+\frac{k}{k^4+k^2+1}+\ldots+\frac{2016}{2016^4+2016^2+1}<\frac{1}{2}.$$

29. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, że

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=7.$$

Wykaż, że istnieje permutacja

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$$

liczb

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7),$$

dla której spełniona jest nierówność

$$b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+b_4b_5+b_5b_6+b_6b_7+b_7b_1 \leqslant 7.$$

30. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano romby $ACFG$ i $BCDE$. Spełnione są równości $\sphericalangle ACF=\sphericalangle CBE$ oraz $AB=1$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB i EG. Oblicz długość odcinka MN.

31. Na każdym polu prostokątnej szachownicy o wymiarach 9×11 znajduje się żarówka. Na każdym polu nieleżącym na brzegu szachownicy znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) dziewięciu żarówek: żarówki na tym polu i na ośmiu polach sąsiadujących z nim bokiem lub narożem. Ponadto na każdym polu, które nie sąsiaduje z żadnym polem leżącym na brzegu szachownicy, znajduje się jeszcze jeden przełącznik, zmieniający stan 25 żarówek umieszczonych na 25 polach tworzących kwadrat 5×5, którego centralnym polem jest pole ze wspomnianym przełącznikiem. Rozstrzygnij, czy używając dostępnych przełączników można z dowolnego stanu początkowego dojść do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

32. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *smerfastyczną*, jeżeli liczba

$$\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}+\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

jest wymierna. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb *smerfastycznych*.

33. Czy da się przeciąć dwunastościan foremny płaszczyzną tak, aby w przekroju otrzymać sześciokąt foremny? Odpowiedź uzasadnij.