Zdalne seminarium OMJ
dla nauczycieli matematyki
Tomasz Szymczyk

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Nie zawsze do pary

1. Jaś i Małgosia dostali od dziadka na Dzień Dziecka 3333 monety, z których każda była o nominale 1 grosz albo 5 groszy. Po przeliczeniu pieniędzy Jaś twierdzi, że mają 150 zł. Małgosia mówi, że Jaś pomylił się w rachowaniu. Kto z nich ma rację?

2. Suma pewnych czterech różnych dodatnich liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Wynika z tego, że

a) co najmniej jedna z tych liczb jest liczbą nieparzystą,

b) iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą,

c) co najmniej dwie z tych liczb są liczbami parzystymi.

3. Liczby a, b, c, d, e, f są parami różnymi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)(1-f)+225=0.$$

Wykazać, że liczba $a+b+c+d+e+f$ jest liczbą parzystą. Wyznaczyć sumę $a+b+c+d+e+f$.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją dodatnie, nieparzyste liczby całkowite a, b, c, d, dla których spełniona jest równość

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1.$$

5. Rozwiązać równanie $xy(x+11y)=13^{10}$ w zbiorze liczb całkowitych.

6. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=101 \\ ab+cd=200. \end{cases}$$

Wykazać, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

7. Dana jest szachownica o wymiarach 8×8. Pionek stoi w lewym dolnym polu i może poruszać się wyłącznie »poziomo« lub »pionowo« przechodząc na sąsiednie pole. Czy można obejść tym pionkiem całą szachownicę tak, że na każdym polu pionek będzie tylko jeden raz i wędrówkę zakończy w prawym górnym polu tej szachownicy?

8. Nauczyciel napisał na tablicy liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Codziennie uczniowie wybierali (spośród zapisanych na tablicy) dwie liczby a, b i w ich miejsce zapisywali liczby $a+1$, $b+1$. Czy w ciągu trzech lat nauki w szkole mogli uzyskać zbiór dziesięciu jednakowych liczb?

9. Wszystkie liczby ze zbioru $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$ ustawiamy w dowolny sposób w ciąg

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}, a_{11})$$

Wykazać, że liczba

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdot\ldots\cdot(a_{10}-10)(a_{11}-11)$$

jest liczbą parzystą.

10. Rozstrzygnij, czy liczby 1, 2, 3, …, 76, 77 można rozbić na 11 grup po 7 liczb tak, aby w każdej grupie suma trzech liczb była równa sumie czterech pozostałych.

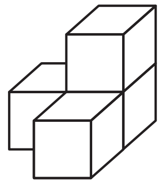
11. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2,

b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2,

c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

12. Klockiem nazwiemy bryłę powstałą z doklejenia sześcianów jednostkowych do trzech parami sąsiednich ścian sześcianu jednostkowego (zobacz rysunek obok). Czy prostopadłościan o wymiarach $125 \times 126 \times 127$ daje się zbudować z tych klocków?



13. W pewnej księdze zapisanych było 100 znaków plus oraz 101 znaków minus. Wybieramy dwa dowolne znaki i — po ich zmazaniu — zamieniamy je jednym znakiem według zasady: jeśli zmazano dwa takie same znaki, to w ich miejsce wpisujemy znak plus, a jeśli zmazano dwa różne znaki, to w ich miejsce wpisujemy znak minus. Operacje te powtarzamy, aż w tej księdze pozostanie tylko jeden znak. Czy w zależności od kolejności wykonywanych operacji możemy określić, jaki to będzie znak?

14. Dana jest tablica o wymiarach 20×19. Rozstrzygnąć, czy w każdą komórkę tej tablicy można wpisać dodatnią liczbę całkowitą tak, aby suma liczb w każdym wierszu oraz suma liczb w każdej kolumnie była liczbą pierwszą.

15. Cztery początkowe wyrazy pewnego ciągu to: 2, 2, 1, 1. Każdy następny wyraz jest cyfrą jedności sumy czterech wyrazów bezpośrednio go poprzedzających. Czy w tym ciągu wystąpi blok: 6, 7, 8, 9?

16. Liczby: 1, 2, 3, ..., 19, 20 zapisano w wierzchołkach i na środkach krawędzi sześcianu, przy czym każda z nich została użyta dokładnie jeden raz. Czy można je tak pozamieniać miejscami, aby liczby zapisane na środkach krawędzi były średnimi arytmetycznymi liczb zapisanych na ich końcach?

17. Dane są takie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{221}, a_{222}$, że

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{221} \cdot a_{222} = 1.$$

Wykazać, że

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{221} + a_{222} \neq 0.$$

18. Dowieść, że krawędzi sześcianu nie da się tak ponumerować liczbami od 1 do 12, aby suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była taka sama.
Czy można spełnić ten warunek numerując krawędzie dwunastoma różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$?

19. Dane jest takich 5 liczb całkowitych, że suma dowolnych trzech spośród nich jest liczbą parzystą. Wykazać, że wszystkie liczby są parzyste.

20. Na 99 kartkach napisano liczby 1, 2, 3, ..., 98, 99 — każdą na jednej kartce. Następnie kartki odwrócono, pomieszano i znów na nich zapisano liczby 1, 2, 3, ..., 98, 99 — po jednej liczbie na kartce. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99}$ oznaczają liczby będące sumami liczb zapisanych na kolejnych kartkach. Wykazać, że liczba $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{98} \cdot a_{99}$ jest parzysta.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej