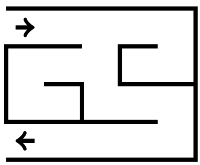
O ROZWAŻANIU PRZYPADKÓW

Seminarium Olimpijskie OMJ

Poniższe zadania pochodzą z OMJ, OM, konkursów Náboj i Náboj Junior, strony Australian Math Trust oraz książek *Problem-Solving Strategies* autorstwa Artura Engela, *Rozszerzony program nauczania matematyki w gimnazjum* autorstwa Wojciecha Guzickiego oraz materiałów Joanny Jaszuńskiej.

ROZGRZEWKA

1. Przejdź labirynt.
2. Adam i Beata grają w kółko i krzyżyk. Udowodnij, że nieistotnie gdzie Beata dorysuje teraz kółko, Adam będzie mógł wygrać w kolejnej turze.
3. Jakie liczby można wpisać w miejsce gwiazdki w sudoku?



○		×
	○	
×		×

⋆	4		
		4	3
2			
			1

4. Przewoźnik musi przeprawić się przez rzekę. Wiezie wilka, kozę i kapustę. Jego łódka umożliwia mu wzięcie ze sobą na pokład jednocześnie tylko jednego elementu inwentarza. Dodatkowo, jeśli zostawi na brzegu bez opieki wilka z kozą, to wilk pożre kozę. Podobnie kapusta nie przetrwa pozostawiona sam na sam z kozą. Czy przewoźnik jest w stanie przewieźć cały inwentarz na drugi brzeg?

ZADANIA NA PRZYPADKI

1. Szóstka przyjaciół bawi się w detektywów i szpiegów. Jeden z nich został wybrany na detektywa i na chwilę wyszedł z pokoju. Pozostała piątka wybiera spośród siebie dwóch szpiegów. Szpiedzy zawsze kłamią, a wszyscy pozostali zawsze mówią prawdę. Detektyw wraca do pokoju i próbuje ustalić, kto jest szpiegiem. Piątka przyjaciół odpowiedziała mu w następujący sposób (liczba w nawiasie odpowiada numerowi gracza).

- Ala (1): „Dominik to szpieg."
- Bartek (2): „Celina nie jest szpiegiem."
- Celina (4): „Bartek na pewno nie jest szpiegiem."
- Dominik (8): „Edek nie jest szpiegiem."
- Edek (16): „Bartek jest szpiegiem."

Jaka jest suma numerów szpiegów?

2. Wiadomo, że prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 9 gramów. Mamy 5 monet o łącznej wadze 48 gramów i dysponujemy wagą elektroniczną. Wykonując ważenie możemy położyć na wagę dowolną liczbę wybranych przez nas monet i odczytać ich łączną wagę. Czy wykonując nie więcej niż 3 ważenia możemy zawsze rozpoznać, które z danych monet są fałszywe, a które prawdziwe?

3. Na ile sposobów można pokolorować sześcian dwoma kolorami? Kolorowania uznajemy za identyczne, jeśli jedno można otrzymać z drugiego obracając sześcian.

4. Wyznacz dla jakich cyfr C liczba $\overline{1234C}$ jest podzielna przez 6?

5. Liczby $a,\ b,\ c,\ d$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=101 \\ ab+cd=200 \end{cases}$$

Wykaż, że dokładnie jedna z liczb $a,\ b,\ c,\ d$ jest nieparzysta.

6. Liczby całkowite dodatnie a i b spełniają równość $a^2-b^2=24$. Znajdź maksymalną wartość wyrażenia a^2+b^2.

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ \ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

NIE ZGUBMY PRZYPADKU

1. Kasia kupiła nowy zegar. Ponieważ lubi symetrię, obserwuje wszystkie momenty, w których wskazówki minutowa i godzinowa tworzą układ symetryczny względem osi przechodzącej przez liczby 12 i 6. Ile takich momentów Kasia zaobserwuje w ciągu jednego dnia?

2. Dana jest siatka punktów o wymiarach 4×4. Ile kwadratów można narysować, tak by każdy z nich miał wierzchołki w punktach siatki?

3. Dana jest siatka punktów o wymiarach 3×5. Ile jest odcinków o końcach w punktach siatki przechodzących przez dokładnie jeden inny punkt siatki?

4. Ile jest różnych siatek sześcianu?

5. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a + b$ jest równa 175.

6. Na wyspie Na-boi żyją trzy rodziny. Do każdej z nich należy dwóch synów i dwie córki. Na ile sposobów można zaaranżować sześć heteroseksualnych małżeństw pomiędzy tymi osobami, zakładając, że małżeństwa pomiędzy rodzeństwem są zabronione?

SPÓJRZMY NA TEST OLIMPIADY

1. Istnieje 2011 liczb takich różnych liczb pierwszych, że
   (a) ich suma jest liczbą nieparzystą;
   (b) ich suma jest liczbą parzystą;
   (c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.

2. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że wśród liczb $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$ są
   (a) dokładnie dwie dodatnie;
   (b) dokładnie dwie ujemne;
   (c) dokładnie trzy ujemne.

3. Iloczyn $a \cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

   (a) 5;
   (b) 8;
   (c) 10.

4. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których
   (a) różnica jest podzielna przez 4;
   (b) suma jest podzielna przez 4;
   (c) iloczyn jest podzielny przez 4.

5. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez
   (a) 2;
   (b) 3;
   (c) 5.

6. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynikaz tego, że
   (a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
   (b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
   (c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

ROZWAŻMY MAŁY PRZYPADEK

1. Rozważmy szachownicę szachową o wymiarach 8×8. W pojedynczym ruchu możemy przekolorować cały wiersz lub całą kolumnę. Czy możliwe jest doprowadzenie do sytuacji, gdy wszystkie pola są pokolorowane jednym kolorem?

2. Żwirek i Muchomorek grają w patyczki. Na początku na stole leży 50 patyczków. Gracze na przemian zabierają ze stołu od 1 do 3 patyczków. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Udowodnij, że Żwirek, który rozpoczyna grę, może grać w taki sposób, by zapewnić sobie zwycięstwo, niezależnie od ruchów Muchomorka.

3. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

NAJGORSZY PRZYPADEK

1. Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić. Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich. Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut, drugiej 5 minut, trzeciej 2 minuty, czwartej 1 minutę. W jakim najkrótszym czasie te osoby mogą wszystkie przedostać się przez most?

2. Chcemy pokolorować pola kwadratu o wymiarach 5×5 na biało i czarno tak, by każdy kwadrat o wymiarach 2×2 zawierał co najmniej 2 czarne pola. Ile co najmniej pól musimy pokolorować na czarno?

3. Planszę o wymiarach 6×6 wyłożono kostkami domina. Udowodnij, że istnieje co najmniej jedna prosta przecinająca planszę, która nie przechodzi przez żadne domino.

ZADANIA DODATKOWE

1. Czworo uczniów zadecydowało się kupić książki matematyczne w taki sposób, że kazdy kupuje trzy parami różne książki. Ponadto, każde dwie osoby kupiły dokładnie jedną taką samą książkę. Jaka jest najmniejsza i największa możliwa liczba książek, którą mogli kupić?

2. Dorota ma cztery karty z liczbami 1, 2, 3 i 6 napisanymi na nich. Chce tak ułożyć wszystkie karty, by tworzyły dwie liczby A i B oraz liczba A była wielokrotnością liczby B, np. $A = 36$ i $B = 12$. Na ile sposobów może to zrobić?

3. Michał ma trzy kurtki - czarną, fioletową i niebieską. Ma cztery koszule - białą, niebieską, pomarańczową i żółtą. Ma także trzy pary jeansów - fioletowe, białe i żółte. Ile kombinacji kurtki, koszuli i spodni jest możliwych, jeśli w obrębie jednej trójki nie może powtórzyć się kolor?

4. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste a, b i c, że wśród liczb $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$
   - dokładnie dwie są dodatnie
   - dokładnie dwie są ujemne
   - wszystkie trzy są ujemne
5. Dla jakich cyfr A liczba $\overline{10A}$ jest pierwsza?
6. Piotr usunął jedną cyfrę z czterocyfrowej liczby pierwszej i otrzymał liczbę 630. Jaka była wyjściowa liczba pierwsza?
7. Ola odkryła nowy rodzaj liczb całkowitych dodatnich – liczby zstępujące. Liczba zstępująca to dla Oli taka liczba całkowita dodania, że żadna z jej cyfr nie jest większa niż 2 i wszystkie jej cyfry ustawione są w porządku ściśle malejącym. Ile jest liczb zstępujących?
8. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie liczb równej 3?
9. Udowodnij, że $6 \mid n^3 - n$.
10. Udowodnij, że $9 \mid 4^n + 15n - 1$.
11. Udowodnij, że każda liczba pierwsza p większa od 3 jest postaci $6k+1$ lub $6k-1$.
12. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występuje co najmniej jedna 1?
13. Ile rozwiązań ma równanie $x^2 - 2|x| = 0$?