

Największy wspólny dzielnik

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
18-19.09.2020 r.

Zadanie 1. Dany jest pełen zbiornik mleka o dużej objętości (np. ponad 100 litrów). Jaś jest w posiadaniu dwóch pojemników: jeden ma objętość 5 litrów, a drugi 9 litrów. Jaś może wykonywać następujące operacje:

- nabierać mleka ze zbiornika do każdego z pojemników,
- odlewać mleko z pojemników z powrotem do zbiornika,
- przelewać mleko pomiędzy pojemnikami.

Czy przy pomocy tych operacji Jaś jest w stanie odmierzyć 2 litry mleka (pojemniki nie mają podziałki)?

Zadanie 2. Suma liczb całkowitych a, b jest podzielna przez 3, zaś różnica $a - b$ jest podzielna przez 4. Pokazać, że liczba $13a + b$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 3. Pokazać, że każda liczba całkowita dodatnia większa od 6 może być zapisana jako suma dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych większych niż 1.

Zadanie 4. Udowodnić, że ułamki

$$\frac{21n + 4}{14n + 3} \quad \text{oraz} \quad \frac{30n + 1}{12n + 1}$$

są nieskracalne dla każdego n naturalnego.

Zadanie 5. Liczby a, b są całkowite. Wykazać prawdziwość poniższych (niezależnych) stwierdzeń.

- Jeśli 13 jest dzielnikiem $a + 4b$, to 13 jest dzielnikiem $10a + b$.
- Jeśli 19 jest dzielnikiem $3a + 7b$, to 19 jest też dzielnikiem $43a + 75b$.
- Jeśli 17 jest dzielnikiem $10a + b$, to 17 jest też dzielnikiem $10a + b$.

Zadanie 6. Liczby $2n + 1$ oraz $3n + 1$ są kwadratami, dla pewnego n . Pokazać, że liczba $5n + 3$ nie jest pierwsza.

Zadanie 7. Liczby całkowite a, b spełniają własność $\text{NWD}(a, b) = 2$. Pokazać, że liczby te nie mogą być obydwie kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 8. Liczby całkowite x oraz y są względnie pierwsze. Pokazać, że również liczby y^2 oraz $x + y$ są względnie pierwsze.

Zadanie 9. Załóżmy, że liczba $a^2 + ab + b^2$ jest podzielna przez 9, przy czym liczby a, b są całkowite. Pokazać, że zarówno a , jak i b są wielokrotnościami liczby 3.

Zadanie 10. Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $ad = bc$. Pokazać, że liczba $a + b + c + d$ nie może być pierwsza.

Zadanie 11. Liczby całkowite dodatnie a, b mają tę własność, że suma $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ jest liczbą całkowitą. Pokazać, że

$$\text{NWD}(a, b) \leq \sqrt{a + b}.$$