

Rozwiązania zadań testowych

1. Miary α , β , γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha + \beta < \gamma$. Wynika z tego, że

- N a) trójkąt ten jest ostrokątny;
 T b) trójkąt ten jest rozwartokątny;
 N c) taki trójkąt nie istnieje.

Komentarz

Przekształcimy podaną nierówność równoważnie. Dodając do obu jej stron γ , otrzymujemy $\alpha + \beta + \gamma < 2\gamma$. Suma kątów w trójkącie jest równa 180° , a zatem $180^\circ < 2\gamma$. Stąd wniosek, że warunek dany w treści zadania jest równoważny zależności $90^\circ < \gamma$, która oznacza, że trójkąt jest rozwartokątny.

2. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

- N a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;
 N b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;
 N c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.

Komentarz

Rozważmy kwadrat, którego przekątna d ma długość $\sqrt[4]{2}$. Liczba $\sqrt[4]{2}$ jest liczbą niewymierną. Ponadto pole rozważanego kwadratu jest równe

$$\frac{1}{2}d^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i jest to liczba niewymierna. Z kolei długość boku tego kwadratu wynosi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}d = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

i jest to także liczba niewymierna. Wreszcie obwód tego kwadratu to

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d = 2\sqrt{2}d = 2\sqrt[4]{8}$$

i ta liczba jest również niewymierna.

3. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

- T a) 4;
 T b) 5;
 N c) 6.

Komentarz

a), b) Niech a będzie liczbą, której pierwsze 2012 cyfr to 1, a cyfry dziesiątek i jedności są równe 0. Liczba a jest podzielna przez 4, gdyż jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Liczba a jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnia cyfra to 0.

c) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba naturalna jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. Liczba 2012 nie jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 2012 nie może być podzielna przez 3. Tym bardziej więc liczba ta nie może być podzielna przez 6.

4. Nierówność $\sqrt{x^2 - 1} > x$

- N a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;
 T b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;
 T c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Komentarz

Każda liczba $x \leq -1$ spełnia podaną nierówność. Istotnie: jeśli $x \leq -1$, to $x^2 \geq 1$, czyli $x^2 - 1 \geq 0$, a zatem wyrażenie $\sqrt{x^2 - 1}$ jest określone. Ponadto $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$. Wobec tego $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 > -1 \geq x$.

5. Dane są takie liczby całkowite a i b , że liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12.

Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

- T a) 2;
 T b) 3;
 N c) 4.

Komentarz

a), b) Skoro obie liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12, to ich suma oraz różnica mają również tę własność. Stąd wynika, że liczby $2a$ i $2b$ są podzielne przez 12, a zatem istnieją takie liczby całkowite k i l , że $2a = 12k$ oraz $2b = 12l$. Wobec tego $a = 6k$, $b = 6l$, więc liczby a i b są podzielne zarówno przez 2 jak i przez 3.

c) Przyjmijmy $a = 6$ oraz $b = 6$. Wówczas liczby $a + b = 12$ i $a - b = 0$ są podzielne przez 12. Jednak wtedy żadna z liczb a i b nie jest podzielna przez 4.

6. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB , BSC , CSA są równe. Wynika z tego, że

N

a) $AS = BS = CS$;

N

b) $AB = BC = CA$;

N

c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Komentarz

Rozważmy czworościan foremny $AB'C'S$ o krawędzi długości 2. Niech B i C będą odpowiednio środkami krawędzi $B'S$, $C'S$. Przecinając rozpatrywany czworościan płaszczyzną ABC , otrzymujemy ostrosłup $ABCS$, w którym kąty ASB , BSC , CSA są równe. Ponadto $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$ oraz $AS = 2$, $BS = 1$, $CS = 1$.

7. Dodatkowo liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Ponadto liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

T

a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;

T

b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$ jest równy 1;

N

c) liczba $a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Komentarz

a) Dodatnia liczba całkowita jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze.

Niech liczba pierwsza p będzie dzielnikiem liczby a . Wówczas liczba p jest także dzielnikiem liczby $a \cdot b$. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, więc liczba p nie jest dzielnikiem liczby b . Wobec tego liczba p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a w takiej samej potędze, jak w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a \cdot b$. Jednak w rozkładzie liczby $a \cdot b$ na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze, gdyż liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

b) Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$. Ponieważ $d \mid a$ oraz $d \mid a + b$, więc liczba d jest również dzielnikiem różnicy tych liczb równej $(a + b) - a = b$. Wobec tego $d \mid a$ oraz $d \mid b$, a skoro największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, to wynika stąd, że $d = 1$.

c) Przyjmijmy $a = 4$ oraz $b = 9$. Liczby a i b spełniają wówczas warunki zadania, ale liczba $a + b = 13$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

- T a) dłuższa od krawędzi podstawy;
 N b) równa krawędzi podstawy;
 N c) krótsza od krawędzi podstawy.

Komentarz

Rozważmy ostrosłup prawidłowy siedmiokątny $ABCDEFGS$ o podstawie siedmiokąta foremnego $ABCDEFG$. Oznaczmy przez O rzut prostokątny wierzchołka S na podstawę ostrosłupa. Wówczas $\sphericalangle AOB = 360^\circ/7$, a zatem $\sphericalangle AOB < 60^\circ$. Wobec tego w trójkącie równoramiennym ABO bok AO jest dłuższy od podstawy AB . Ponadto, w trójkącie prostokątnym AOS przeciwprostokątna AS jest dłuższa od przyprostokątnej AO .

Podsumowując, $AS > AO > AB$, czyli w dowolnym ostrosłupie prawidłowym siedmiokątnym krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy.

9. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a . Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a . Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

- T a) 10;
 T b) 13;
 N c) 30.

Komentarz

a) Zwiększając liczbę d o 30%, uzyskujemy liczbę $d + \frac{30}{100}d = \frac{13}{10}d$, która jest całkowita. Oznaczmy tę liczbę przez l . Wówczas $\frac{13}{10}d = l$, czyli $13d = 10l$, a zatem 10 jest dzielnikiem liczby $13d$. Liczby 13 i 10 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1). Wobec tego 10 jest dzielnikiem liczby d . Ponieważ d jest dzielnikiem liczby a , więc wynika stąd, że 10 jest dzielnikiem liczby a .

b) Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę $\frac{13}{10}d$, która jest dzielnikiem liczby a . Wobec tego istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że $a = \frac{13}{10}dk$. Mnożąc ostatnią zależność stronami przez 10, uzyskujemy $10a = 13dk$. Stąd wniosek, że 13 jest dzielnikiem liczby $10a$. Ponieważ liczba 13 jest pierwsza, więc jest ona dzielnikiem liczby 10 lub liczby a . Pierwszy z tych przypadków nie jest spełniony. Wobec tego 13 jest dzielnikiem liczby a .

c) Przyjmijmy $a = 130$ oraz $d = 10$. Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę 13, będącą dzielnikiem liczby 130. Jednocześnie liczba 130 nie jest podzielna przez 30.

10. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D . Wynika z tego, że kąt ADC jest

- T a) równy $3 \cdot \sphericalangle DAC$;
 N b) większy od kąta ACB ;
 N c) mniejszy od kąta BAC .

Komentarz

a) Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC , skąd wynika, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC$. Ponadto, $AC = BC$, a zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Ponieważ kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD , więc

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC + 2 \cdot \sphericalangle DAC = 3 \cdot \sphericalangle DAC.$$

c) Wykazaliśmy przed chwilą, że $\sphericalangle ADC = 3 \cdot \sphericalangle DAC$, podczas gdy $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Wobec tego kąt ADC jest większy od kąta BAC .

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Wówczas $\sphericalangle DAC = 15^\circ$, więc $\sphericalangle ADC = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, a zatem $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADC$.

11. Liczba $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

- N a) niewymierna;
 T b) całkowita;
 T c) większa od $\frac{2}{3}$.

Komentarz

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (2+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} + \frac{1 \cdot (1+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \cdot (1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} = \frac{5+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} = 1. \end{aligned}$$

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Wynika z tego, że

- T a) $AK = AL$;
 T b) $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$;
 N c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD .

Komentarz

a) Oznaczmy przez O środek sfery. Wówczas $\sphericalangle OKA = 90^\circ = \sphericalangle OLA$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$AK^2 = AO^2 - OK^2 = AO^2 - OL^2 = AL^2,$$

skąd $AK = AL$.

b) Wykazaliśmy wyżej, że $AK = AL$. Analogicznie wykazujemy, że $BK = BL$. Trójkąty ABK i ABL mają ponadto wspólny bok AB . Wobec tego trójkąty te są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd wynika, że $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$.

c) Rozpatrzmy taki czworościan $ABCD$, że trójkąt ABC jest równoboczny, a trójkąt ABD prostokątny równoramienny o kącie prostym przy wierzchołku D . Przypuśćmy, że punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD . Wtedy półproste AK i BK są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC i ABC , skąd wniosek, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ABK = 30^\circ$, więc $\sphericalangle AKB = 120^\circ$. Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle ALB = 135^\circ$. A zatem $\sphericalangle AKB \neq \sphericalangle ALB$, wbrew udowodnionej wcześniej równości $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że oba punkty K i L nie mogą być jednocześnie środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD .

13. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

- | |
|---|
| T |
|---|

 a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od $1/5$;
- | |
|---|
| T |
|---|

 b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od $1/2$;
- | |
|---|
| N |
|---|

 c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

Komentarz

Oznaczmy przez a , b , c i d długości czterech części, na które podzielono odcinek. Warunek dany w treści zadania oznacza, że $a + b + c + d = 1$.

a) Przypuśćmy, że

$$a \leq \frac{1}{5}, \quad b \leq \frac{1}{5}, \quad c \leq \frac{1}{5} \quad \text{oraz} \quad d \leq \frac{1}{5}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, otrzymujemy $a + b + c + d \leq 4/5$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że długość co najmniej jednej części jest większa od $1/5$.

b) Przypuśćmy, że

$$a + b < \frac{1}{2}, \quad a + c < \frac{1}{2}, \quad a + d < \frac{1}{2}, \quad b + c < \frac{1}{2}, \quad b + d < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad c + d < \frac{1}{2}.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, uzyskujemy

$$3a + 3b + 3c + 3d < \frac{6}{2}, \quad \text{czyli} \quad a + b + c + d < 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że suma długości pewnych dwóch części jest nie mniejsza od $1/2$.

c) Przyjmijmy $a = 1/10$, $b = 1/10$, $c = 3/10$, $d = 5/10$. Wtedy $a + b + c + d = 1$, lecz żadne trzy spośród tych czterech długości nie spełniają nierówności trójkąta.

14. Dane są takie liczby a , b , że $a > b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

- T a) liczba $a - b$ jest wymierna;
 N b) liczba ab jest wymierna;
 N c) obie liczby a i b są wymierne.

Komentarz

a) Liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne, a zatem ich różnica

$$a(b+1) - b(a+1) = ab + a - ab - b = a - b$$

również jest liczbą wymierną.

b), c) Przyjmijmy $a = \sqrt{2}$ oraz $b = \sqrt{2} - 1$. Wówczas $a > b$, a ponadto liczby $a(b+1)$ oraz $b(a+1)$ są wymierne, gdyż

$$a(b+1) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1 + 1) = 2, \quad b(a+1) = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1.$$

Jednak wtedy liczby a i b oraz liczba

$$ab = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

nie są wymierne.

15. W czworoboku $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

- T a) $AD \geq BC$;
 N b) kąt CDA jest prosty;
 T c) $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

Komentarz

a) Przez punkty B i C poprowadźmy odpowiednio płaszczyzny k i l prostopadłe do prostej BC . Wówczas płaszczyzny te są równoległe, a odległość między nimi jest równa długości odcinka BC . Ponadto punkt A należy do płaszczyzny k , a punkt D do płaszczyzny l . Stąd $AD \geq BC$.

b) Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B . Przez punkt C poprowadźmy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i wybierzmy na niej

punkt D , różny od punktu C . Wówczas czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania. Zauważmy jednak, że w trójkącie ACD kąt ACD jest prosty, a zatem kąt CDA jest mniejszy od 90° .

c) Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \quad \text{a zatem} \quad BC^2 = AC^2 - AB^2.$$

Podobnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCD , otrzymujemy

$$BC^2 + CD^2 = BD^2, \quad \text{więc} \quad BC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Wobec tego $AC^2 - AB^2 = BD^2 - CD^2$, skąd wniosek, że $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

