XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(29 września 2016 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Dodatnia liczba a powiększona o 50% jest równa dodatniej liczbie b pomniejszonej o 50%. Wynika z tego, że liczba b jest

N a) 2 razy większa od liczby a;

T b) 3 razy większa od liczby a;

N c) 4 razy większa od liczby a.

Komentarz

Z warunków zadania wynika, że

$$a+\frac{50}{100}a=b-\frac{50}{100}b,$$

skąd uzyskujemy $3a=b$.

2. Pole powierzchni sześcianu A jest 4 razy mniejsze od pola powierzchni sześcianu B. Wynika z tego, że

T a) krawędź sześcianu A jest 2 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

N b) krawędź sześcianu A jest 4 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

T c) objętość sześcianu A jest 8 razy mniejsza od objętości sześcianu B.

Komentarz

a), b) Oznaczmy przez a długość krawędzi sześcianu A, a przez b długość krawędzi sześcianu B. Z warunków zadania wynika, że $6b^2=4\cdot 6a^2$, skąd uzyskujemy $b=2a$.

c) Objętość sześcianu A jest równa a^3, a objętość sześcianu B jest równa

$$b^3=(2a)^3=8a^3,$$

czyli jest 8 razy większa od objętości sześcianu A.

3. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a\geqslant b$. Wynika z tego, że

N a) $a^2\geqslant ab$;

N b) $a^2\geqslant b^2$;

T c) $a^3\geqslant b^3$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

a), b) Jeżeli $a=-1$, $b=-2$, to nierówność $a\geqslant b$ jest spełniona, ale

$$a^2=1<2=ab \quad \text{oraz} \quad a^2=1<4=b^2.$$

c) Ponieważ $a\geqslant b$, więc możliwe są trzy przypadki: 1) $a\geqslant b\geqslant 0$, 2) $a>0>b$, 3) $0\geqslant a\geqslant b$. W przypadku 1) obie strony nierówności $a\geqslant b$ są liczbami nieujemnymi, wobec tego możemy obie strony tej nierówności podnieść do dowolnej potęgi, będącej liczbą naturalną. W szczególności, uzyskujemy $a^3\geqslant b^3$.

W przypadku 2) liczba a^3 jest dodatnia, a liczba b^3 jest ujemna, wobec czego $a^3>b^3$.

Wreszcie w przypadku 3) obie liczby $-a$ i $-b$ są nieujemne oraz $-b\geqslant -a$. W związku z tym, podnosząc obie strony tej nierówności do trzeciej potęgi, uzyskujemy $(-b)^3\geqslant(-a)^3$, czyli $a^3\geqslant b^3$.

4. W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E. Wynika z tego, że

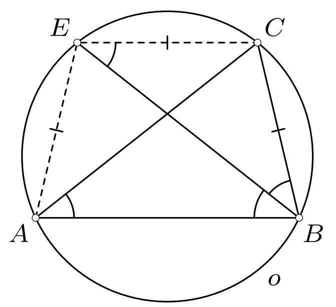
$\boxed{\text{T}}$ a) $EA=BC$;

$\boxed{\text{N}}$ b) $CA=2\cdot BC$;

$\boxed{\text{T}}$ c) proste EC i AB są równoległe.

Komentarz

a) Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez o (rys. 1). Z warunków zadania wynika, że $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CBE=\sphericalangle EBA$. Kąty te są wpisane w okrąg o i oparte odpowiednio na łukach BC, CE oraz EA, a więc łuki te są równej długości. Stąd wniosek, że również cięciwy BC, CE oraz EA są równej długości.



rys. 1

b) Zapisując nierówność trójkąta dla trójkąta ACE, uzyskujemy

$$CA<CE+EA=2\cdot BC.$$

c) Kąty BEC i EBA są kątami wpisanymi w okrąg o, opartymi odpowiednio na łukach BC i EA, które są równej długości. Wobec tego $\sphericalangle BEC=\sphericalangle EBA$, a to oznacza, że proste EC i AB są równoległe.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Uwaga

W rozwiązaniu skorzystaliśmy z własności kątów wpisanych w okrąg, opartych na przystających łukach. Więcej własności i przykładów zastosowań w zadaniach można odnaleźć w artykule „O łukach równej długości”, *Kwadrat* nr 14 (grudzień 2014).

5. Liczba $\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ trójek}}$ jest podzielna przez 99. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna

T a) przez 3;

T b) przez 6;

N c) przez 9.

Komentarz

Przyjmijmy oznaczenie $A_n = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ trójek}}$.

a) Liczba A_n jest podzielna przez 99, więc jest również liczbą podzielną przez 9. To oznacza, że suma cyfr liczby A_n — równa $3n$ — jest liczbą podzielną przez 9. Stąd wynika, że n jest liczbą podzielną przez 3.

b) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 jest równy 1, więc wykorzystując podpunkt a), wystarczy dowieść, że liczba n jest parzysta.

Przypuśćmy, że liczba n jest nieparzysta. Wówczas liczba

$$A_n = \underbrace{33\ldots30}_{n-1 \text{ cyfr}} + 3 = 33 \cdot \underbrace{1010\ldots10}_{n-1 \text{ cyfr}} + 3$$

daje resztę 3 z dzielenia przez 33. Nie jest więc podzielna przez 33, a tym bardziej przez 99. Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba n jest parzysta.

c) Zauważmy, że $A_6 = 333333 = 99 \cdot 3367$, a 6 nie jest liczbą podzielną przez 9.

Uwaga

Można dowieść, że A_n jest liczbą podzielną przez 99 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

6. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że

N a) obie liczby a i b są niewymierne;

N b) co najmniej jedna z liczb a, b jest wymierna;

T c) co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

a) Jeżeli $a=\sqrt{6}$ i $b=-2$, to

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=\sqrt{12}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$$

jest liczbą wymierną, a jedna z liczb a, b jest wymierna.

b) Jeżeli $a=\sqrt{2}$ i $b=\sqrt{3}$, to

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=2+3=5$$

jest liczbą wymierną, a żadna z liczb a, b nie jest wymierna.

c) Załóżmy, że obydwie liczby a i b są wymierne. Przyjmijmy oznaczenie $c=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$; z warunków zadania wynika więc, że c jest liczbą wymierną. Zauważmy, że

$$(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^2=c^2,$$

$$2a^2+2ab\sqrt{6}+3b^2=c^2,$$

$$2ab\sqrt{6}=c^2-2a^2-3b^2.$$

Ponieważ obie liczby a i b są różne od 0, więc $ab\neq 0$. Wobec tego

$$\sqrt{6}=\frac{c^2-2a^2-3b^2}{2ab}.$$

Zarówno licznik, jak i mianownik ułamka stojącego po prawej stronie ostatniej równości są liczbami wymiernymi, więc cały ułamek jest liczbą wymierną. Tymczasem lewa strona ostatniej równości, równa $\sqrt{6}$, jest liczbą niewymierną. Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a i b jest niewymierna.

7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku S. Wynika z tego, że

T a) $AB+CD+EF=BC+DE+FA$;

N b) $AD=BE=CF$;

T c) suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS, DES, FAS.

Komentarz

a) Oznaczmy odpowiednio przez a, b, c, d, e, f długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ poprowadzonych z punktów A, B, C, D, E, F (rys. 2). Wówczas

$$AB+CD+EF=a+b+c+d+e+f=BC+DE+FA.$$

c) Zauważmy, że wysokości trójkątów ABS, CDS, EFS opuszczone z wierzchołka S mają tę samą długość, równą promieniowi r okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ (rys. 3). Wobec tego suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa

$$\frac{AB\cdot r}{2}+\frac{CD\cdot r}{2}+\frac{EF\cdot r}{2}=\frac{r}{2}(AB+CD+EF).$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

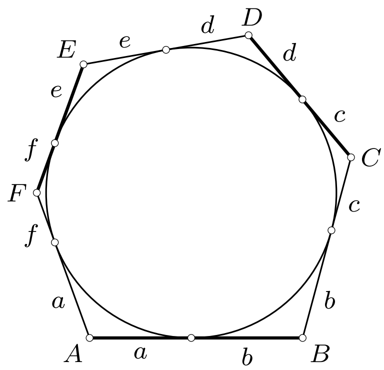
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

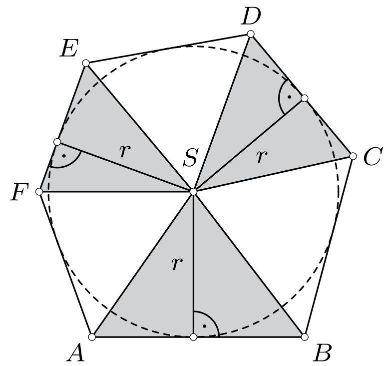
Analogicznie dochodzimy do wniosku, że suma pól trójkątów BCS, DES, FAS jest równa

$$\frac{r}{2}(BC+DE+FA).$$

Aby przekonać się, że rozważane sumy pól są równe, pozostaje skorzystać z konkluzji podpunktu a).



rys. 2

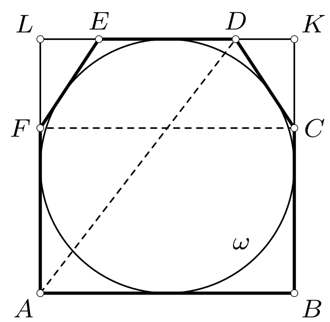


rys. 3

b) Rozważmy kwadrat $ABKL$ opisany na okręgu ω. Na bokach AL, BK wybierzmy odpowiednio takie punkty F, C, że $AF = BC > \frac{1}{2}AB$ (rys. 4). Wreszcie niech D, E będą takimi punktami należącymi do odcinka KL, że odcinki CD i EF są styczne do okręgu ω.

Wówczas $ABCDEF$ jest sześciokątem opisanym na okręgu ω, ale

$$CF = AB = AL < AD.$$



rys. 4

8. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wynika z tego, że w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych można przedstawić także liczbę

T a) $2n$;

N b) $3n$;

T c) $4n$.

Komentarz

Z warunków zadania wynika, że istnieją takie liczby całkowite a i b, że $n = a^2 + b^2$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

c) Zauważmy, że $4n = 4a^2 + 4b^2 = (2a)^2 + (2b)^2$ oraz liczby $2a$ i $2b$ są całkowite.

a) Zauważmy, że

$$2n = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

oraz liczby $a+b$ i $a-b$ są całkowite.

b) Liczba $n = 1 = 1^2 + 0^2$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, ale liczba $3n = 3$ nie da się przedstawić w tej postaci.

Uwagi

1. Można udowodnić, że jeżeli różną od zera liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, to liczby $3n$ nie można przedstawić w takiej postaci.

2. Zależności wyprowadzone w podpunktach c) i a) są szczególnymi przypadkami tzw. *tożsamości Diofantosa*. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule „Tożsamość Diofantosa”, *Kwadrat* nr 2 (grudzień 2011).

9. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że ten czworokąt jest

N a) rombem;

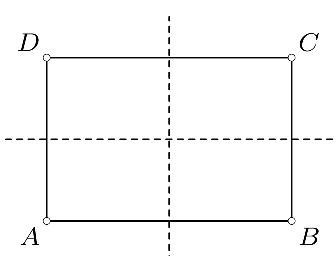
N b) prostokątem;

T c) równoległobokiem.

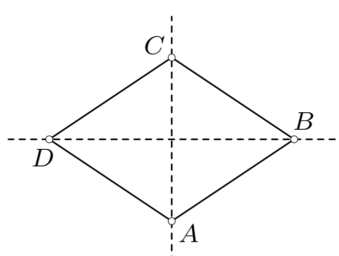
Komentarz

a) Dowolny prostokąt nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 5).

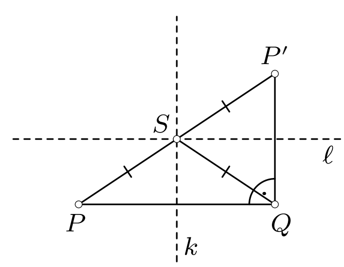
b) Dowolny romb nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 6).



rys. 5



rys. 6



rys. 7

c) Udowodnimy ogólniejszy fakt: jeżeli wielokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to są one prostopadłe, a ich punkt przecięcia jest środkiem symetrii wielokąta. Wynika stąd, że jeśli czworokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to ma on także środek symetrii, a więc jest równoległobokiem.

Niech k i ℓ będą (jedynymi dwiema) osiami symetrii wielokąta $\mathcal{W}$. Oznaczmy przez k' prostą symetryczną do prostej k względem prostej ℓ. Wówczas prosta k' również jest

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

osią symetrii wielokąta $\mathcal{W}$ oraz $k' \neq \ell$, skąd wynika, że $k' = k$. Tym samym prosta k jest symetryczna względem prostej ℓ (różnej od k), a to oznacza, że proste k i ℓ są prostopadłe.

Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych k i ℓ. Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny, Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej k, a P' będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej ℓ (rys. 7). Zauważmy, że punkt P należy do wielokąta $\mathcal{W}$ dokładnie wtedy, gdy punkt Q należy do wielokąta $\mathcal{W}$, czyli dokładnie wtedy, gdy punkt P' należy do wielokąta $\mathcal{W}$. Dowód będzie więc zakończony, jeśli wykażemy, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S — będzie to oznaczało, że S jest środkiem symetrii wielokąta $\mathcal{W}$.

Zauważmy, że $SP = SQ = SP'$, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQP'. Z prostopadłości prostych k i ℓ wynika, że $\sphericalangle PQP' = 90°$, czyli trójkąt PQP' jest prostokątny i wobec tego punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej PP'. To oznacza, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S i kończy dowód faktu.

Uwaga

Można uzasadnić, że jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest on prostokątem (nie będącym kwadratem) lub rombem (nie będącym kwadratem). Zarówno prostokąt, jak i romb są równoległobokami. Wobec tego, jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest równoległobokiem, choć oczywiście na każdy równoległobok ma dwie osie symetrii.

10. Liczby wymierne a, b, c są różne i każdy z iloczynów $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$ jest liczbą całkowitą. Wynika z tego, że

N a) co najmniej jedna z liczb a, b, c jest całkowita;

N b) co najmniej dwie z liczb a, b, c są całkowite;

N c) każda z liczb a, b, c jest całkowita.

Komentarz

Niech $a = \frac{3 \cdot 5}{2}$, $b = \frac{5 \cdot 2}{3}$, $c = \frac{2 \cdot 3}{5}$. Liczby a, b, c są różne, wymierne i żadna z nich nie jest liczbą całkowitą. Tymczasem każdy z iloczynów $a \cdot b = 25$, $b \cdot c = 4$, $c \cdot a = 9$ jest liczbą całkowitą.

11. Dany jest taki trójkąt ABC, że $\sphericalangle ACB = 30°$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R, a promień okręgu wpisanego jest równy r. Wynika z tego, że

T a) $AB = R$;

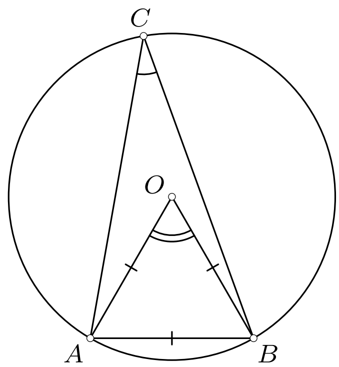
N b) $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;

T c) pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2.

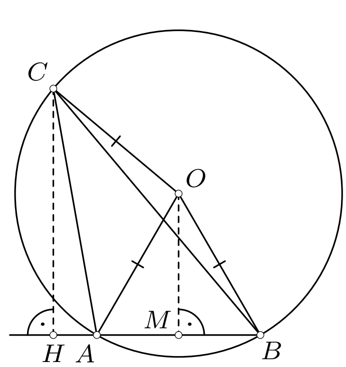
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

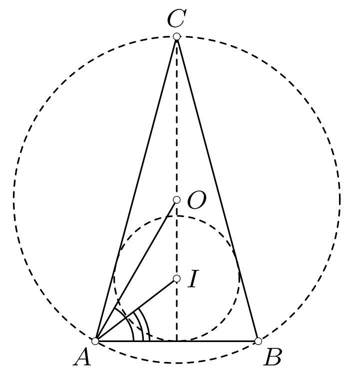
a) Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 8). Ponieważ $\sphericalangle AOB = 2\cdot\sphericalangle ACB = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$ oraz $AO = BO = R$, więc trójkąt ABO jest równoboczny. Stąd wniosek, że $AB = R$.



rys. 8



rys. 9



rys. 10

c) Niech H będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C, a M spodkiem wysokości trójkąta równobocznego ABO, poprowadzonej z wierzchołka O (rys. 9). Wówczas

$$CH \leqslant CO + OM = R + \frac{R\sqrt{3}}{2} < 2R.$$

Wobec tego, oznaczając przez S pole trójkąta ABC, uzyskujemy

$$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH < \frac{1}{2}\cdot R\cdot 2R = R^2.$$

b) Rozważmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = 75^\circ$ (rys. 10). Oznaczmy środek okręgu wpisanego w ten trójkąt przez I. Punkty O oraz I leżą na prostej prostopadłej do AB oraz

$$\sphericalangle BAO = 60^\circ > 37.5^\circ = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle BAI.$$

Wobec tego odległość punktu I od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu O od prostej AB, a zatem $r < \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. Istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n, aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby

N a) 3;

T b) 5;

T c) 7.

Komentarz

a) Jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba 2^n nie jest podzielna przez 3. Wobec tego także suma cyfr zapisu dziesiętnego liczby 2^n nie jest podzielna przez 3. Tymczasem liczba będąca dodatnią całkowitą potęgą liczby 3 jest podzielna przez 3, a więc suma cyfr jej zapisu dziesiętnego jest liczbą podzielną przez 3.

b) Dla $n=9$ cyfry liczby $2^n=512$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $125=5^3$.

c) Dla $n=10$ cyfry liczby $2^n=1024$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $2401=7^4$.

13. Każda krawędź graniastosłupa n-kątnego została pomalowana na jeden z trzech kolorów w taki sposób, że w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się krawędzie trzech kolorów. Wynika z tego, że

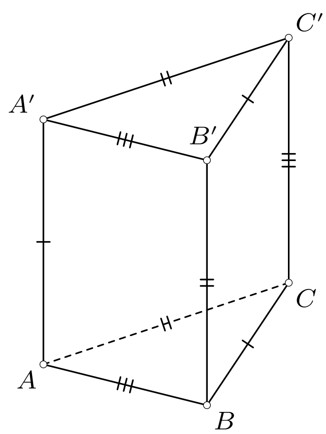
N a) n jest liczbą parzystą;

N b) wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa mają ten sam kolor;

T c) ten graniastosłup ma po n krawędzi każdego koloru.

Komentarz

a), b) Rozważmy graniastosłup trójkątny o podstawach ABC, $A'B'C'$ i krawędziach bocznych AA', BB', CC' (rys. 11). Jeżeli krawędzie AA', BC, $B'C'$ pomalujemy na czerwono, krawędzie BB', CA, $C'A'$ na zielono, a krawędzie CC', AB, $A'B'$ na niebiesko, to warunki zadania będą spełnione. Wówczas $n=3$ jest liczbą nieparzystą oraz krawędzie AA', BB', CC' mają różne kolory.



rys. 11

c) Przyjmijmy, że krawędzie graniastosłupa pomalowano na czerwono, zielono i niebiesko. Z warunków zadania wynika, że każdy z $2n$ wierzchołków graniastosłupa jest końcem dokładnie jednej czerwonej krawędzi. Ponieważ każda krawędź łączy dokładnie dwa wierzchołki graniastosłupa, więc krawędzi czerwonych jest dokładnie $2n/2=n$. W pełni analogicznie uzasadniamy, że wielościan te posiada dokładnie n krawędzi zielonych i dokładnie n krawędzi niebieskich.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

14. Spośród wierzchołków pewnego dwunastokąta foremnego wyróżniono siedem. Wynika z tego, że wśród wyróżnionych punktów można wskazać takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta

$\boxed{\text{T}}$ a) prostokątnego;

$\boxed{\text{N}}$ b) równobocznego;

$\boxed{\text{N}}$ c) rozwartokątnego równoramiennego.

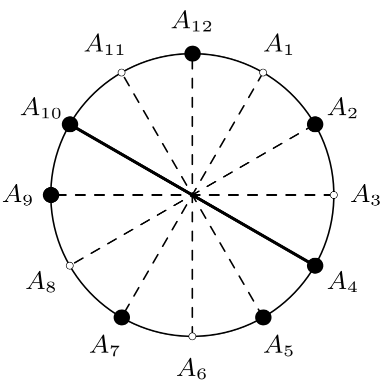
Komentarz

Oznaczmy dany dwunastokąt foremny przez $A_1A_2\ldots A_{12}$.

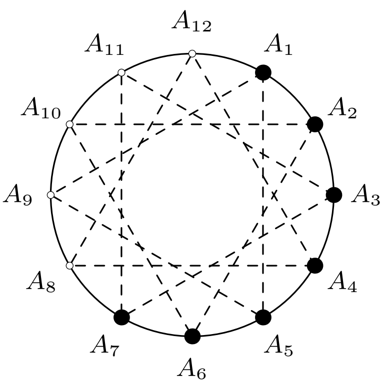
a) Zauważmy, że co najmniej jedna z sześciu średnic okręgu opisanego na danym dwunastokącie

$$A_1A_7,\ A_2A_8,\ A_3A_9,\ A_4A_{10},\ A_5A_{11},\ A_6A_{12}$$

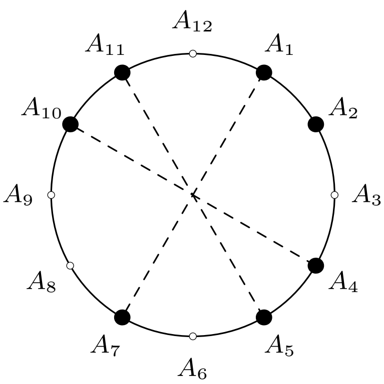
ma obydwa końce w wyróżnionych punktach (rys. 12), gdyż w przeciwnym przypadku wyróżnionych punktów byłoby co najwyżej sześć. Dołączając do końców takiej średnicy dowolny inny wyróżniony punkt, otrzymujemy wierzchołki trójkąta prostokątnego.



rys. 12



rys. 13



rys. 14

b) Jeżeli wyróżnione zostały punkty A_1, A_2, …, A_7, to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta równobocznego (rys. 13). Rzeczywiście, tylko cztery trójki wierzchołków danego dwunastokąta wyznaczają trójkąty równoboczne:

$$A_1A_5A_9,\ A_2A_6A_{10},\ A_3A_7A_{11},\ A_4A_8A_{12}$$

i żadna z nich nie jest złożona wyłącznie z wyróżnionych punktów.

c) Jeżeli wyróżnione zostały punkty A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_{10}, A_{11} (rys. 14), to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego równoramiennego. Wówczas jedynymi trójkątami równoramiennymi o wierzchołkach w wyróżnionych punktach są

$$A_1A_4A_7,\ A_1A_4A_{10},\ A_1A_7A_{10},\ A_2A_5A_{11},\ A_4A_7A_{10}$$

i wszystkie te trójkąty są prostokątne (gdyż odcinki A_1A_7, A_4A_{10}, A_5A_{11} są średnicami okręgu opisanego na danym dwunastokącie).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Uwaga

Można zauważyć, że dołączając punkt A_8 do siódemek wyróżnionych punktów w kontrprzykładach do podpunktów b) oraz c), otrzymujemy ósemki wyróżnionych punktów wciąż stanowiące odpowiednie kontrprzykłady. Wobec tego odpowiedzi w podpunktach b) oraz c) nie ulegną zmianie, jeśli w treści zadania słowo *siedem* zastąpimy przez *osiem*.

15. Sześcian można rozciąć na

T a) trzy ostrosłupy czworokątne;

T b) cztery graniastosłupy trójkątne;

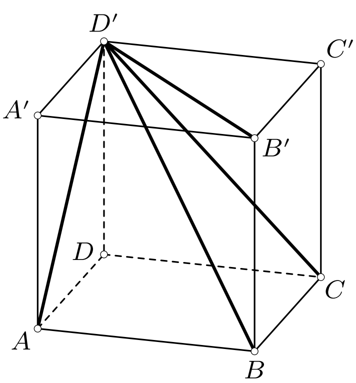
T c) pięć czworościanów;

Komentarz

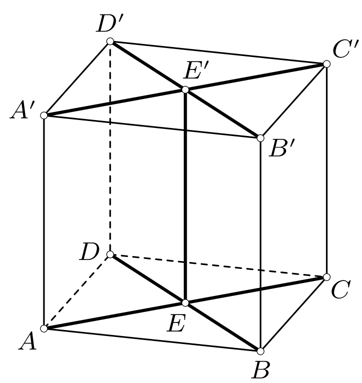
a) Na rysunku 15 sześcian został podzielony na trzy ostrosłupy czworokątne o podstawach $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ABCD$ i wspólnym wierzchołku D'.

b) Na rysunku 16 sześcian został podzielony na cztery graniastosłupy trójkątne o podstawach ABE, BCE, CDE, DEF i wspólnej krawędzi bocznej EE', łączącej środki ścian $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

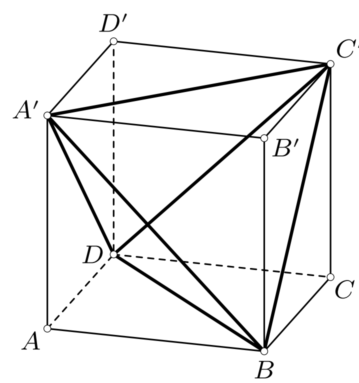
c) Na rysunku 17 sześcian został podzielony na pięć czworościanów $A'BC'B'$, $A'BAD$, $A'D'C'D$, $CBC'D$ oraz $A'BC'D$.



rys. 15



rys. 16



rys. 17

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku