Ułamki

Zadanie 1. Skróć ułamek

$$A = \frac{3\,333}{55\,555\,555\,555\,555\,555\,555}.$$

Zadanie 2. Uzasadnij, że ułamek

$$\frac{30n+1}{12n+1}$$

jest nieskracalny dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Dla pewnych liczb naturalnych n ułamek

$$\frac{19n+7}{7n+11}$$

jest skracalny. Wyznacz największą taką liczbę k, przez którą można ten ułamek skrócić. Wyznacz wszystkie liczby n, dla których ułamek skróci się przez k.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie liczby całkowite n, dla których całkowita jest liczba

a) $\dfrac{3n+21}{n+2}$

b) $\dfrac{8n-8}{4n+5}$

c) $\dfrac{5n+9}{3n+4}$

d) $\dfrac{9n+2}{2n-1}$

e) $\dfrac{n^2+50}{n+5}$

f) $\dfrac{n^3-2n+3}{n-2}$.

Zadanie 5. Liczby a i b są całkowite dodatnie. Wykaż, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

jest nieskracalny.

Zadanie 6. Oblicz

$$0{,}(12)+0{,}(53); \quad 0{,}(74)+0{,}(89); \quad 0{,}(76)+0{,}(837); \quad 0{,}(31)\cdot 3; \quad 0{,}(31)\cdot 7.$$

Zadanie 7. Zapisz iloraz

$$\frac{0{,}(23)}{0{,}(234)}$$

w postaci ułamka zwykłego o liczniku i mianowniku całkowitym.

Zadanie 8. Wykaż, że każdą liczbę z przedziału $(0,1)$ można zapisać w postaci sumy kilku liczb dodatnich, których zapis dziesiętny po przecinku zawiera jedynie cyfry 0 i 1.

Zadanie 9. Liczba x jest niewymierna. Wynika z tego, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby x:

a) co najmniej jedna cyfra występuje nieskończenie wiele razy;

b) co najmniej dwie cyfry występują nieskończenie wiele razy;

c) co najmniej trzy cyfry występują nieskończenie wiele razy.

Zadanie 10. Ile dziewiątek jest w pierwszych 2024 cyfrach rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{1}{9801}$?

Zadanie 11. Oblicz
$$2\frac{1}{11} \cdot 2\frac{12}{13} + 1\frac{2}{11} \cdot 2\frac{1}{13} + \frac{10}{11} \cdot 7\frac{1}{13}.$$

Zadanie 12. Oblicz
$$\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{423133 \cdot 846267 + 423134}.$$

Zadanie 13. Wiadomo, że $\frac{x}{x^2+1} = a$. Wyznacz $\frac{x^2}{x^4+1}$.

Zadanie 14. Udowodnij równość
$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\left(7^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\left(8^4+\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{145}.$$

Zadanie 15. Udowodnij nierówność
$$\sum_{n=1}^{2019} \frac{n}{n^4+4} < \frac{7}{16}.$$

Zadanie 16. Jacek, Wacek i Placek spożywają wspólnie tort urodzinowy. Gdyby Jacek wchłonął go sam, to zajęłoby mu to 2 razy dłużej. Gdyby Wacek świętował w samotności, to zajęłoby mu to 3 razy dłużej. Gdybyś zaś Placek okazał się wiśnią i nie podzielił się z przyjaciółmi, to przyjemność ta kosztowałoby go o 7 minut dłużej niż przy zbiorowej biesiadzie. Ile czasu potrzebują chłopcy na wspólną konsumpcję?

Zadanie 17. Oto przykładowe rozwinięcie ułamka zwykłego w ułamek łańcuchowy:
$$\frac{1129}{489} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}}}}.$$

Jak rozwinąć dany ułamek zwykły w ułamek łańcuchowy? A jak szybko przejść z ułamka łańcuchowego do ułamka zwykłego?

Zadanie 18. Sumę
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2024}$$
przedstawiono w postaci ułamka nieskracalnego. Iloma zerami kończy się mianownik tego ułamka?

Zadanie 19. Wykaż, że liczba postaci
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
nie jest całkowita dla żadnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

Zadanie 20. Udowodnij, że
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \cdots + \frac{1}{2024}.$$

Zadanie 21. Wiadomo, że
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q},\quad \text{gdzie } p,q\in\mathbb{N}.$$
Wykaż, że $1979 \mid p$.

Zadanie 22. Udowodnij, że
$$\frac{2023}{2}-\frac{2022}{3}+\frac{2021}{4}-\cdots-\frac{2}{2023}+\frac{1}{2024}=\frac{1}{1013}+\frac{3}{1014}+\cdots+\frac{2023}{2024}.$$

Zadanie 23. Oblicz
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdot+\frac{1}{2024\cdot 2025}.$$

Zadanie 24. Oblicz
$$\frac{1}{12}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{252}+\frac{1}{396}.$$

Zadanie 25. Wykaż, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi wzór
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Zadanie 26. Oblicz
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

Zadanie 27. Oblicz
$$\frac{1^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

Zadanie 28. Oblicz
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$$

Zadanie 29. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest tożsamość
$$\frac{2}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(2n-1)}.$$
Jak to może pomóc w rozłożeniu ułamka $\frac{3}{17}$ na sumę parami różnych ułamków prostych?

Zadanie 30. Znajdź wszystkie rozkłady ułamka $\frac{3}{2018}$ na sumę dwóch ułamków prostych.

Zadanie 31. Wykaż, że każda liczba wymierna z przedziału $(0,1)$ rozkłada się na sumę parami różnych ułamków prostych.

Zadanie 32. Wykaż, że każda liczba wymierna dodatnia rozkłada się na sumę parami różnych ułamków prostych.

Zadanie 33. Wykaż, że każda liczba wymierna dodatnia ma nieskończenie wiele rozkładów na sumę ułamków prostych.

Zadanie 34. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 6$ można znaleźć (niekoniecznie różne) dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające
$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=1.$$

Zadanie 35. Którymi wielokątami foremnymi możemy wyparkietować płaszczyznę?

I to już wszystko. Dziękuję za uwagę!

Filip Majewski: fm.matematyka@gmail.com.