

Uzasadnianie podzielności

Zadanie 1. Podaj najmniejszą liczbę 10-cyfrową zapisaną różnymi cyframi, która dzieli się przez 36.

Zadanie 2. Ile jest takich 100-cyfrowych liczb, których iloczyn cyfr jest równy 6 i które są parzyste?

Zadanie 3. Czy z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 można ułożyć kwadrat magiczny?

Zadanie 4. Czy cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę pierwszą?

Zadanie 5. Każda spośród pewnych sześciu różnych cyfr jest niezerowa. Czy można te cyfry zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę podzielną przez 4?

Zadanie 6. Dane są liczby naturalne a, b, c spełniające warunek $a \cdot b \cdot c = 71286$. Uzasadnij, że co najmniej jedna z sum $a + b, b + c$ nie jest podzielna przez 3.

Zadanie 7. Z cyfr 1, 2, ..., 8 utworzono dwie liczby 4-cyfrowe, wykorzystując każdą cyfrę dokładnie raz. Wykaż, że suma uzyskanych liczb jest podzielna przez 9.

Zadanie 8. Na tablicy napisano trzy liczby trzycyfrowe o sumie równej 1000. Wszystkie użyte cyfry były różne. Jakiej cyfry nie użyto?

Zadanie 9. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Uzasadnij, że suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2.

Zadanie 10. Rozstrzygnij, czy istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przedstawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n , aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby 3.

Zadanie 11. Każda cyfra pewnej 9-cyfrowej liczby n jest równa 2 lub 5. Uzasadnij, że liczba n jest podzielna przez 3.

Zadanie 12. Rozstrzygnij, czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite, których suma jest podzielna przez 20.

Zadanie 13. Wykaż, że z każdych pięciu dodatnich liczb całkowitych można wybrać takie trzy, których suma jest podzielna przez 3.

Zadanie 14. Wykaż, że 5 jest jedyną liczbą pierwszą p , dla której liczba $3p + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 15. Wykaż, że istnieje tylko jedna liczba pierwsza p , taka że obie liczby $p + 8$ oraz $p + 10$ są pierwsze.

Zadanie 16. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ są pierwsze.

Zadanie 17. Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n , że liczba $\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{99 \dots 9}_n$ jest pierwsza.

Zadanie 18. Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe postaci $\overline{aaabbb}$, które są kwadratami liczby całkowitej.

Zadanie 19. Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Zadanie 20. Dana jest prostokątna tablica liczb o wymiarach 20×19 . Rozstrzygnij, czy w każdą komórkę tej tablicy można wpisać dodatnią liczbę całkowitą tak, aby suma liczb w każdym wierszu oraz suma liczb w każdej kolumnie była liczbą pierwszą.

Zadania 1-7 pochodzą z książki pt. *Matematyczne Gwiazdki* Joanny i Jerzego Bednarczuków.

Zadania 14-15 pochodzą z książki pt. *207 dowodów matematycznych w dwóch krokach* Marii Mędrzyckiej.

Zadania 8-13, 16-19 pochodzą z zawodów OMJ (również z części testowej) oraz Obozów Naukowych OMJ.