W sumie, to proste!

Zdalne Seminarium OMJ, 17-18 września 2021

Tabele.

1. Małgosia wpisała w białe pola poniższej tablicy liczby naturalne, a następnie w żółtych polach wpisała sumy liczb znajdujących się w kolumnach nad nimi, a w niebieskich polach – sumy liczb w wierszach na lewo od nich. Następnie Małgosia starła liczby w białych polach oraz w jednym niebieskim. Jaka liczba znajdowała się na tym niebieskim polu?

			13
			20
14	7	16	

2. Oblicz $1 + 2 + \ldots + 2021$.

3. Liczby 1, 2,. . . , 49 rozmieszczono w tablicy 7×7, po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech A oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, a B sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozmieszczenie liczb, że $A = B$?

4. W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

Grupowanie.

5. Czy można w poniższe kratki wpisać liczby całkowite, tak aby suma wszystkich wpisanych liczb była dodatnia, natomiast suma dowolnych czterech kolejnych była ujemna?

(a)

(b)

6. Czy liczby 1,2,. . . ,20 można podzielić na cztery rozłączne grupy w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich grupach były równe?

7. Krawędzie sześcianu chcemy ponumerować liczbami 1,2,. . . ,12 tak, aby każdej z nich użyć dokładnie raz i aby suma liczb na krawędziach wychodzących z dowolnego wierzchołka była podzielna

(a) przez 5,

(b) przez 4.

Czy jest to możliwe?

8. Krawędzie sześcianu chcemy ponumerować liczbami 1,2,. . . ,12 tak, aby każdej z nich użyć dokładnie raz i aby suma liczb na krawędziach wychodzących z dowolnego wierzchołka była taka sama. Czy jest to możliwe?

9. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami 1,2,. . . ,20, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.

Kombinatoryka.

10. W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

11. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

Układy równań.

12. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, które spełniają równania

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1 \\ y^2 = 2x - 1 \end{cases} .$$

13. Udowodnij, że nie istnieją trzy liczby rzeczywiste a, b, c, które spełniają równania:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & = 23 \\ a + 2b + 4c & = 22 \end{cases} .$$

Geometryczny deser.

14. Niech l będzie obwodem pewnego czworokąta wypukłego i niech d będzie sumą długości jego przekątnych. Udowodnij, że $d < l < 2d$.

15. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$