

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OM

(wersja wstępna — treści zadań)



30 maja – 7 czerwca 2026 r.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	7	3	6	4
2.	6	3	1	10
3.	9	1	8	2
4.	3	0	0	17
5.	6	0	2	12
6.	3	2	2	13
7.	11	0	0	9
8.	9	4	3	4
9.	4	0	1	15
10.	2	1	0	17
11.	0	0	0	20
12.	6	0	10	4
13.	16	2	2	0
14.	10	1	0	9
15.	3	0	0	17
16.	3	1	2	14
17.	14	2	1	3
18.	5	0	0	15
19.	10	1	1	8
20.	3	0	1	16
21.	0	0	2	18
22.	7	2	9	2
23.	5	2	1	12
24.	0	0	0	20
25.	3	0	1	16
26.	0	0	1	19

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite k , dla których istnieje k kolejnych dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn ma w zapisie dziesiętnym końcowe cyfry tworzące liczbę k .

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich a, b, c , dla których iloraz

$$\frac{abc + ab + a}{abc + bc + c}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. W prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$ umieszczono abc sześciennych klocków o krawędzi 1. Niektóre klocki są białe, a pozostałe są czarne. Wiadomo, że każda prosta równoległa do jednej z krawędzi pudełka przechodzi przez wnętrze co najwyżej jednego białego klocka. Jaka jest największa możliwa liczba białych klocków w pudełku?

Zadanie 4.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD , gdzie $AB \parallel CD$ i $AB > CD$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P . Okrąg opisany na trójkącie ABP przecina prostą BC po raz drugi w punkcie X , różnym od B . Punkt Y leżący na prostej AX spełnia warunek $DY \parallel BC$. Wykaż, że

$$\sphericalangle YDA = 2 \sphericalangle YCA.$$

Zadanie 5.

Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b + c = \frac{1}{a} \\ b^2 + c + a = \frac{1}{b} \\ c^2 + a + b = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Wykaż, że pewne dwie z liczb a, b, c są równe.

Zadanie 6.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n o parzystej liczbie dodatnich dzielników, których dodatnie dzielniki można podzielić na pary w taki sposób, że suma liczb w każdej parze jest potęgą trójki.

Zadanie 7.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest prosty. Na okręgu opisanym na tym trójkącie wybrano punkt D różny od wierzchołków trójkąta. Przez M, N oznaczamy odpowiednio rzuty punktu B na proste AC i AD . Wykaż, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD .

Zadanie 8.

Pewna liczba całkowita $n > 2$ ma k dodatnich dzielników. Wykaż, że istnieją dwa różne dzielniki a i b liczby n takie, że

$$k \mid a - b.$$

Zadanie 9.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunek $abc = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a + b + c + 3}{4} \geq \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}.$$

Zadanie 10.

Na osi liczbowej, w punkcie 0, stoi królik. Co minutę wykonuje skok dowolnej dodatniej całkowitej długości, w prawo albo w lewo. Łączna długość wszystkich jego skoków ma wynosić 2025.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k , dla których królik może zakończyć swoją podróż w punkcie k na nieparzyście wiele sposobów.

Zadanie 11.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt ADC jest prosty, kąty $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle ABC$ są rozwarte oraz $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC$. Ponadto $AB = 2CD$.

Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do prostej AD przecina dwusieczną zewnętrzną kąta ABC w punkcie T . Wykaż, że

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Zadanie 12.

Powiemy, że ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, \dots, a_n jest *średnio rosnący*, jeżeli dla każdego $k = 1, 2, \dots, n-1$ średnia arytmetyczna pierwszych k wyrazów jest mniejsza od średniej arytmetycznej pierwszych $k+1$ wyrazów tego ciągu.

W zależności od n wyznacz najmniejszą liczbę, która może wystąpić jako ostatni wyraz średnio rosnącej permutacji zbioru $1, 2, \dots, n$.

Zadanie 13.

Na okręgu, w równych odstępach, znajduje się 2025 żarówek. Każda z nich jest zapalona albo zgaszona. O każdej pełnej godzinie każda żarówka, która przez ostatnią godzinę była w innym stanie niż obaj jej sąsiedzi, zmienia swój stan. Wykaż, że o pewnej pełnej godzinie żadna żarówka nie zmieni swojego stanu.

Zadanie 14.

Rozstrzygnij, czy istnieje liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita N , które spełniają następujący warunek: dla dowolnej dodatniej N -cyfrowej liczby całkowitej o niezerowych cyfrach można tak przestawić jej cyfry, aby otrzymać liczbę podzieloną przez p .

Zadanie 15.

Dany jest romb $ABCD$. Na odcinkach AB i AD wybrano odpowiednio punkty P oraz Q tak, że odcinek PQ jest styczny do okręgu wpisanego w ten romb. Udowodnij, że pole trójkąta CPQ nie zależy od wyboru punktów P i Q .

Zadanie 16.

Ciąg dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, \dots nazwiemy *mraśnym*, jeżeli dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniony jest warunek

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} = a_n^2.$$

Wyznacz wszystkie ciągi mraśne, których pewien wyraz wynosi 3.

Zadanie 17.

Trójka parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c spełnia

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 18.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD , przy czym $AB > CD$, przekątne przecinają się w punkcie X . Przez I oznaczamy środek okręgu dopisanego do boku BX trójkąta ABX , a przez J środek okręgu dopisanego do boku CX trójkąta CDX . Wykaż, że odcinki IC i JB mają równe długości.

Zadanie 19.

Klasa w liceum składa się z 20 pszczoł, przy czym każda pszczoła ma dokładnie trzech bliskich znajomych, a znajomość jest wzajemna. Pięć pszczoł zakupiło już bilety na nadchodzący koncert. Jeżeli jakaś pszczoła ma co najmniej dwóch bliskich znajomych, którzy już zakupili bilety, to również zakupi bilet. Czy jest możliwe, aby wszystkie pszczoły zakupiły bilety na koncert?

Zadanie 20.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{a-1} \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor.$$

Zadanie 21.

Znajdź wszystkie niemalejące nieskończone ciągi a_1, a_2, \dots dodatnich liczb całkowitych spełniające następującą własność: dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, m liczby $a_n + a_m$ oraz $n + m$ mają tyle samo dodatnich dzielników.

Zadanie 22.

W rzędzie leży 2026 monet, z których każda jest obrócona do góry orłem albo reszką. W jednym ruchu możemy wybrać dowolny ciąg kolejnych monet i obrócić wszystkie z nich. Chcemy po pewnej liczbie ruchów doprowadzić do stanu, w którym wszystkie monety są obrócone do góry reszką. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, po której będziemy w stanie osiągnąć taki stan, niezależnie od początkowego ułożenia monet?

Zadanie 23.

Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 17. \end{cases}$$

Zadanie 24.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz okrąg o opisany na tym trójkącie. Niech D będzie środkiem odcinka AC , zaś E spodkiem wysokości z punktu A na bok BC . Prosta DE przecina prostą AB w punkcie F . Punkt H , leżący na łuku BC okręgu o niezawierającym punktu A , spełnia warunek $\sphericalangle BHE = \sphericalangle ABC$. Udowodnij, że $\sphericalangle BHF = 90^\circ$.

Zadanie 25.

Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą. Załóżmy, że

$$n \mid p - 1 \quad \text{oraz} \quad p \mid n^4 + n^2 + 1.$$

Udowodnij, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 26.

Dany jest na płaszczyźnie skończony zbiór S złożony z co najmniej trzech punktów i spełniający następującą własność: dowolne trzy punkty zbioru S można pokryć kołem o promieniu 1. Udowodnij, że cały zbiór S można pokryć kołem o promieniu 1.

Mecz matematyczny

Zadanie 27.

Anna i Bananna grają w grę, używając $n \geq 3$ punktów zaznaczonych na okręgu. W swojej turze gracz musi narysować trójkąt o wierzchołkach w trzech spośród tych punktów, z których żaden nie był dotąd końcem żadnego narysowanego odcinka, przy czym nowo narysowane odcinki nie mogą przecinać żadnych odcinków narysowanych wcześniej. Gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Jeśli Anna wykonuje pierwszy ruch, kto może zagwarantować sobie zwycięstwo?

Zadanie 28.

Półowa pól planszy $2n \times 2n$ jest czarna, a połowa biała. Jaś wpisuje w pola planszy liczby $1, 2, \dots, 4n^2$ w taki sposób, że kolejne liczby znajdują się w polach sąsiadujących krawędzią, a w każdym polu znajduje się dokładnie jedna liczba. Wynikiem Jasia nazwiemy sumę liczb wpisanych w czarne pola.

W zależności od n wyznacz najwyższy wynik, jaki Jaś może uzyskać, niezależnie od sposobu pokolorowania planszy.

Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano $n \geq 3$ prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Proste te dzielą płaszczyznę na pewną liczbę wielokątów oraz pewną liczbę nieograniczonych obszarów. Wykaż, że co najmniej $n - 2$ spośród tych wielokątów jest trójkątami.

Zadanie 30.

Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $p - q$ oraz $pq - q$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 31.

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych $m, n > 1$, dla których każda z liczb

$$1^n - 1, 2^n - 1, \dots, n^n - 1$$

jest podzielna przez m .

Zadanie 32.

Na tablicy napisana jest liczba 2026. Jeżeli na tablicy znajduje się liczba postaci $a^k + b^k$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, k , to możemy dopisać do tablicy liczbę $a^l + b^l$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej l . Znajdź wszystkie liczby, które mogą pojawić się na tablicy po pewnej liczbie takich ruchów.

Zadanie 33.

Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą, a a_0, a_1, \dots, a_n liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że istnieje taka nieujemna liczba całkowita $k \leq n$, że nierówność

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \leq a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

jest spełniona dla dowolnej liczby rzeczywistej x z przedziału $[0, 1]$.

Zadanie 34.

Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki

$$a + b + c = 0 \quad \text{oraz} \quad a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a.$$

Wykaż, że

$$ab + bc + ca = -3.$$

Zadanie 35.

Czy możliwe jest pokolorowanie każdej z liczb

$$1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + 2026\sqrt{2}$$

na żółto albo zielono tak, aby iloczyn wszystkich liczb żółtych miał taką samą część ułamkową jak iloczyn wszystkich liczb zielonych?

Zadanie 36.

W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $AB < AC$. Na krótszym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC wybrano punkty X, Y w taki sposób, że

$$BX = XY = YC.$$

Na odcinku AY wybrano punkt N spełniający warunek

$$AB = AN = CN.$$

Wykaż, że prosta CN przechodzi przez środek odcinka AX .

Zadanie 37.

W trójkącie ABC , w którym $AC = BC$, dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina bok AC w punkcie D . Prosta prostopadła do BD , przechodząca przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC , przecina bok BC w punkcie E . Prosta przechodząca przez E i równoległa do BD przecina bok AC w punkcie F . Wykaż, że

$$CE = FD.$$

Zadanie 38.

Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio w punktach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B . Półproste O_1B i O_2B przecinają okręgi o_2 i o_1 po raz drugi odpowiednio w punktach E i F . Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do prostej EF , która przecina okręgi o_1 i o_2 po raz drugi odpowiednio w punktach M i N . Wykaż, że

$$MN = AE + AF.$$