Na ile sposobów...?

Seminarium OMJ — 14 września 2024 r.

Rozgrzewka

Zadanie 1.

(a) Ile jest możliwych dwukolorowych flag złożonych z dwóch poziomych pasów jeśli do dyspozycji są 4 kolory (czerwony, zielony, niebieski, biały)?

(b) Na ile sposobów można wybrać dwa różne kolory z czterech?

(c) Na ile sposobów można wybrać 2 z ustalonych n obiektów?

(d) Na ile sposobów można wybrać 3 z ustalonych n obiektów?

($\star$) Na ile sposobów można wybrać k z n obiektów?

Zadanie 2.

(a) W turnieju bierze udział n osób, przy czym każda z nich rozgrywa z każdą inną dokładnie jeden mecz. Ile meczów jest rozegranych w turnieju?

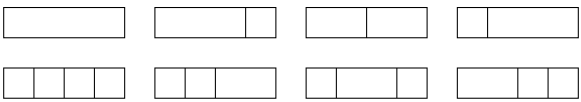
(b) Ile przekątnych ma n-kąt wypukły?

Zadanie 3. Na płaszczyźnie narysowano n prostych, spośród których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie.

(a) W ilu różnych punktach przecinają się narysowane proste?

(b) Ile jest trójkątów wyznaczonych przez narysowane proste? (Liczymy również takie trójkąty, które są pokrojone na mniejsze kawałki.)

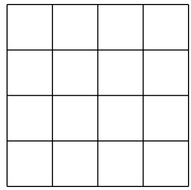
Zadanie 4. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Na ile sposobów można rozciąć prostokąt $1 \times n$ na prostokątne paski o całkowitych długościach? Przykładowo dla $n = 4$ poprawna odpowiedź to 8, gdyż jest osiem sposobów rozcięcia prostokąta 1×4:



Zadanie 5. (wariacja nt. 2/III/XIX OMJ) Na ile sposobów można rozciąć kwadrat 5×5 na cztery kwadraty 2×2 oraz dziewięć kwadratów 1×1?

Zliczanie na obrazkach

Zadanie 6.

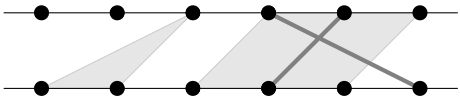


(a) Ile prostokątów widać na obrazku?

(b) Jaka byłaby odpowiedź w przypadku obrazka przedstawiającego pokratkowany prostokąt $1 \times n$?

(c) A w przypadku obrazka $m \times n$?

Zadanie 7. Danych jest dwanaście punktów kratowych ułożonych w prostokąt 2×6.



(a) Na ile sposobów można z nich wybrać 3 punkty, które są wierzchołkami TRÓJKĄTA (czyli nie leżą na jednej prostej)?

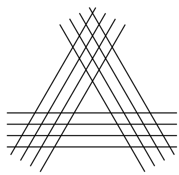
(b) Na ile sposobów można z nich wybrać 4 punkty, które są wierzchołkami RÓWNOLEGŁOBOKU?

(c) Ile jest PAR KRZYŻUJĄCYCH SIĘ ODCINKÓW o obu końcach w danych punktach?

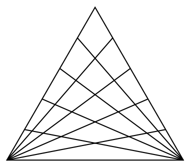
(d) Jakie będą odpowiedzi w przypadku $2n$ punktów ułożonych w prostokąt $2 \times n$?

Zadanie 8. Dla każdego z obrazków, wyznacz liczbę widocznych na nim trójkątów.

(a) Po n prostych w każdym z trzech kierunków, żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie (na rysunku $n = 4$).

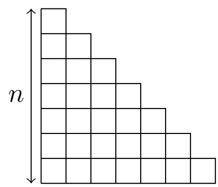


(b) Trójkąt równoboczny o boku n podzielony przy użyciu $2(n-1)$ odcinków łączących dwa spośród wierzchołków z punktami na przeciwległych bokach (na rysunku $n = 5$).

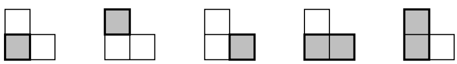


Zadanie 9. ($\star$)

Ile prostokątów widać na rysunku „schodków” o wysokości n?



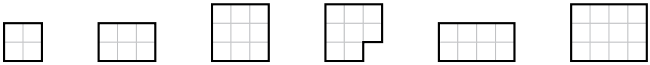
Przykładowo dla $n = 2$ poprawna odpowiedź to 5:



Pokrycia dominami

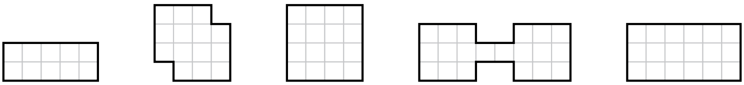
Pokrycie dominami pewnej figury to ułożenie kostek 1×2 w taki sposób, aby zakrywały całą figurę, a przy tym na siebie nie nachodziły i nie wystawały poza figurę. (Pokrycia uznajemy za różne nawet jeśli po wykonaniu obrotu lub odbicia wyglądają tak samo.)

Zadanie 10. Wyznacz liczbę pokryć dominami każdej z następujących figur:



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Zadanie 11. Wyznacz liczbę pokryć dominami każdej z następujących figur:



(a) (b) (c) (d) (e)

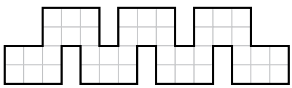
Zadanie 12. Oznaczmy przez F_n liczbę pokryć dominami prostokąta $2 \times n$.

(a) Na podstawie poprzednich zadań podaj wartości F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Oblicz F_6.

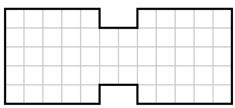
(b) Uzasadnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi równość $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Wyznacz kolejne wyrazy ciągu aż do F_{10}.

($\star$) Wykaż, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi równość $F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2$.

Zadanie 13. Ile pokryć dominami ma wąż o n ogniwach? (Wąż na rysunku ma ich 7.)



Zadanie 14. Wykaż, że liczba pokryć dominami figury przedstawionej poniżej jest kwadratem liczby całkowitej (nie wyznaczając jej).

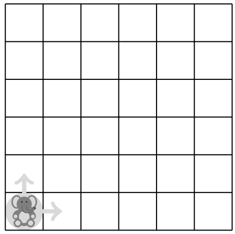


Wędrówki po planszach

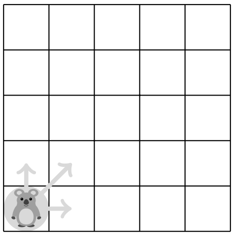
Zadanie 15. Na jednym końcu prostokątnego paska 1×12 stoi pionek. W jednym ruchu można go przesunąć o 1 lub o 2 pola w kierunku drugiego końca. Na ile sposobów można dojść na drugi koniec paska?

Zadanie 16. W lewym dolnym rogu planszy 6×6 stoi SŁOŃ. Słoń to figura szachowa, która w jednym ruchu może poruszyć się o jedno pole w górę albo o jedno pole w prawo. Na ile różnych sposobów słoń może dojść do prawego górnego rogu planszy?

(⋆) Jaki będzie wynik dla planszy $m \times n$?

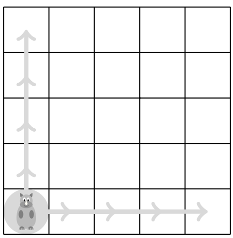


Zadanie 17. W lewym dolnym rogu planszy 5×5 stoi KOALA. Koala to figura szachowa, która w jednym ruchu może poruszyć się o jedno pole albo w górę, albo w prawo, albo po skosie w górę i w prawo. Na ile różnych sposobów koala może dojść do prawego górnego rogu planszy?



(⋆) Na ile sposobów koala może dojść do prawego górnego rogu w PARZYSTEJ liczbie ruchów? A w NIEPARZYSTEJ? Czy potrafisz uzasadnić podejrzany związek między otrzymanymi wynikami?

Zadanie 18. W lewym dolnym rogu planszy 5×5 stoi NOSOROŻEC. Nosorożec to figura szachowa, która w jednym ruchu może poruszyć się o dowolną liczbę pól w górę albo w prawo (czyli tak jak wieża, tylko nie może ruszać się w lewo ani w dół). Na ile różnych sposobów nosorożec może dojść do prawego górnego rogu planszy?



Dodatkowe zadania

Zadanie 19. Na ile sposobów można pomalować pola tablicy 3×3 na biało lub czarno w taki sposób, aby w każdej kolumnie było co najmniej jedno czarne pole oraz w całej tablicy było co najmniej jedno białe pole?

Zadanie 20. Na ile sposobów można pokolorować tablicę 8×8 w taki sposób, aby w każdym kwadracie 2×2 były dwa pola czarne i dwa pola białe?

Wskazówka: Rozważ następujące przypadki: 1) pewne domino w pierwszym wierszu jest jednokolorowe; 2) pewne domino w pierwszej kolumnie jest jednokolorowe; 3) żadne z powyższych. Czy są kolorowania, które policzymy zarówno w przypadku 1), jak i 2) (tj. czy może się zdarzyć, że te dwie własności są spełnione jednocześnie)?

Zadanie 21. Na ile sposobów można pokolorować tablicę 8×8 w taki sposób, aby w każdym kwadracie 2×2 była parzysta liczba czarnych pól?

Wskazówka: Rozważ dowolne kolorowanie wyłącznie 15 pól z pierwszego wiersza i pierwszej kolumny. Uzasadnij, że każde takie kolorowanie jednoznacznie rozszerza się do kolorowania całej szachownicy.

Zadanie 22. Na prostej zaznaczono w równych odstępach 21 punktów. Na ile sposobów można wybrać trzy spośród zaznaczonych punktów w taki sposób, aby jeden z nich był środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych?

Zadanie 23. Wyznacz liczbę ułożeń wieży $2 \times 2 \times 10$ z cegieł $1 \times 2 \times 2$.

Zadanie 24. Wyznacz liczbę pokryć prostokąta 3×10 przy użyciu kostek domina.

Zadanie 25. Na okręgu zaznaczono wierzchołki $2n$-kąta foremnego, przy czym $n \geqslant 2$. Ile jest trójkątów OSTROKĄTNYCH, które mają wszystkie trzy wierzchołki w zaznaczonych punktach?

(Trójkąt wpisany w okrąg jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu znajduje się we wnętrzu trójkąta.)

Zadanie 26. Na brzegu koła zaznaczono n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy o obu końcach w zaznaczonych punktach. Załóżmy, że każdy punkt wewnątrz koła należy do co najwyżej dwóch narysowanych cięciw.

(a) Ile jest skrzyżowań cięciw?

(b) Ile trójkątów widać na tak powstałym obrazku?

(c) Ile jest obszarów, na które narysowane cięciwy podzieliły koło?

Zadanie 27. (6/III/XII OM) Ktoś napisał sześć listów do sześciu osób i zaadresował do nich sześć kopert. Iloma sposobami można listy tak włożyć do kopert, żeby żaden list nie trafił do właściwej koperty?